XXV Olimpiada Nacional de Matemática

Grados participantes: desde 3º hasta 9º grado.

Primera Fase: del 16 al 28 de septiembre de 2024.

Segunda Fase: 23 de noviembre de 2024.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

Organizan:

PRIMERA FASE:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde tercer grado hasta noveno grado. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa actualmente. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos para un grado anterior al grado que cursa el estudiante.

Indicaciones:

- Los estudiantes de segundo grado pueden realizar la prueba de tercer grado.
- La participación de todo estudiante será admitida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Sin embargo, puede hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas y numeradas. Además, cada página deberá contener el nombre y apellido completo del estudiante.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. Así que aquellas **participaciones en las que solo aparezcan las respuestas no serán tomadas en cuenta**. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es necesario enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, ordenadas y sin tachaduras.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo. **No se aceptarán soluciones a lápiz**. En ningún caso se calificarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la vigésimo quinta Olimpiada Nacional de Matemática está descrito en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/matematica/` .

REGISTRO:

Para participar es necesario registrarse en el sitio `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro`. Los participantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector de vivienda, dirección, Número de Identificación Estudiantil (NIE), nombre de la persona responsable, teléfono y correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y/o nombre.

ACERCA DE LA SEGUNDA FASE:

Las participaciones de la primera fase que alcancen el puntaje requerido para clasificar en cada grado deberán realizar una prueba presencial el **sábado 23 de noviembre de 2024**. La prueba se administrará en las sedes del Programa Jóvenes Talento.
En el sitio oficial del Programa, `http://www.jovenestalento.edu.sv`, el **miércoles 13 de noviembre de 2024** se publicará el listado oficial de convocados a la segunda fase. Dicho listado incluirá información acerca del lugar y horario en el que se realizará dicha prueba.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la segunda fase serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación organiza en cooperación con la Universidad de El Salvador. El PJT tiene diferentes componentes cuyos objetivos son descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcar en sus participantes la disciplina y el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, así como desarrollar en ellos capacidades de liderazgo y compromiso cívico.
Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el internado **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, durante 30 sábados en horario de 9:00 am a 4:00 pm; mientras que el segundo es un internado intensivo que se desarrolla al finalizar el año escolar.
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Astronomía, Biología, Física, Informática y Química.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el **martes 18 de marzo de 2025** por la tarde. La Academia Sabatina 2025 se inaugurará el sábado **22 de marzo de 2025** con clases presenciales durante los turnos matutino y vespertino.

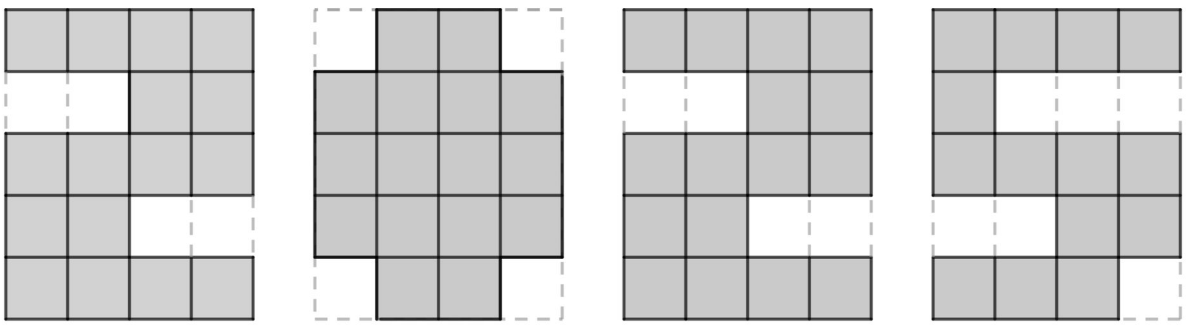
Tercer grado

Problema 1

Enrique tiene cinco relojes, pero solo uno muestra la hora exacta. Uno de ellos está adelantado 20 minutos, otro está atrasado 20 minutos y los otros dos se detuvieron hace una semana. Determinar cuál es el reloj que marca la hora correcta.

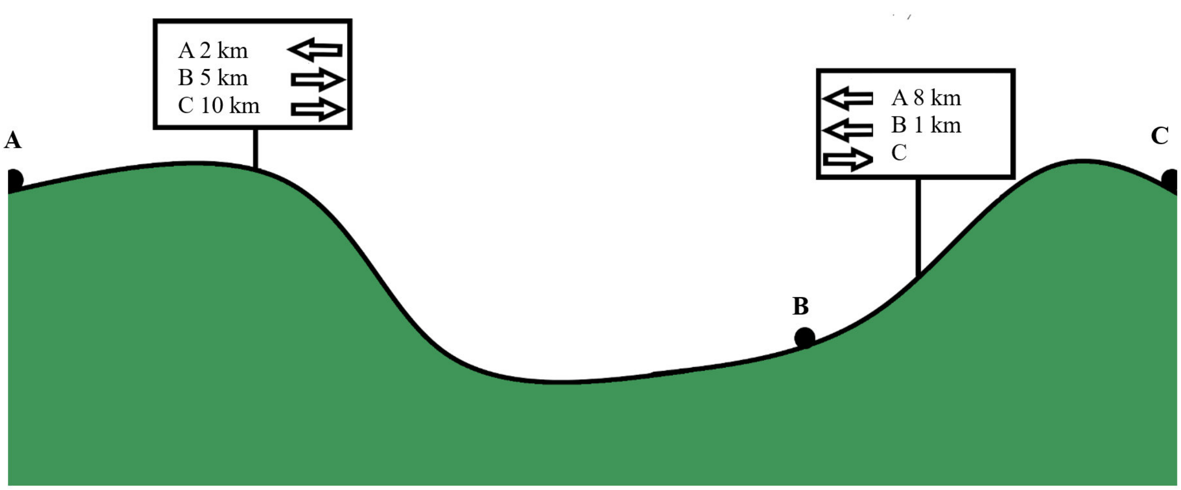
Problema 2

Con cuatro tarjetas cuadriculadas de 4×5, se ha representado el número 2025 en forma de píxeles, haciendo algunos recortes. Determinar el número que se forma al ordenar las tarjetas de mayor a menor perímetro.



Problema 3

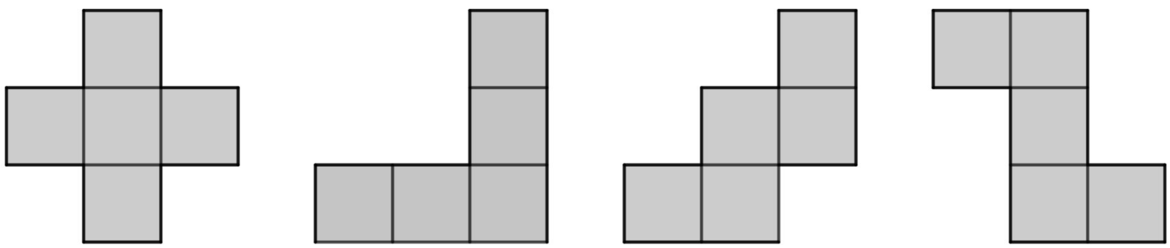
Toñito se dispone a recorrer el camino que une la ciudad A con la C, pasando por B. Sube y baja un par de colinas, encontrando carteles que indican la distancia a cada ciudad. Encontrar el dato que falta en el segundo cartel.



Problema 4

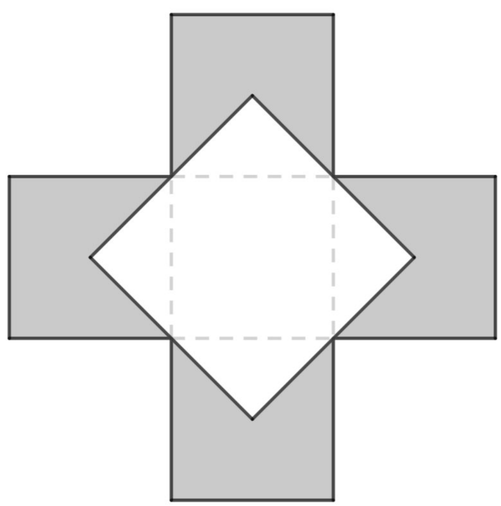
Fátima quiere colocar una de las cuatro piezas sobre un tablero que contiene los números del 1 al 9, de modo que los cuadrados de cada figura se superpongan perfectamente con los cuadrados del tablero. Si se permite girar las piezas, determinar cuál pieza debe utilizar y cómo debe colocarla para que la suma de los números cubiertos sea la mayor posible.

2	1	9
7	8	6
4	5	3



Problema 5

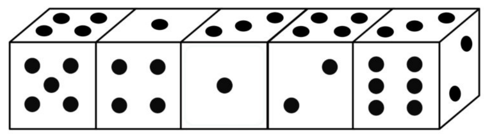
La siguiente figura se ha construido usando cinco cuadrados idénticos colocados en forma de cruz. Luego, se ha puesto encima otro cuadrado de 8 cm^2 de área, cuyos vértices coinciden con los centros de los cuadrados en los brazos de la cruz. Calcular el área de la región sombreada.



Cuarto grado

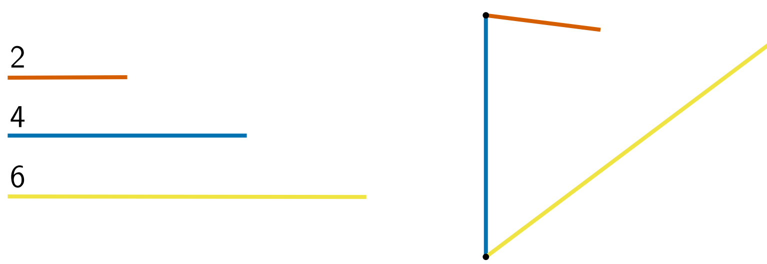
Problema 1

Lucía coloca 5 dados organizados en fila, pinta las 11 caras visibles en la imagen y luego separa los dados. Determinar la suma de los puntos de las caras que no quedaron pintadas.



Problema 2

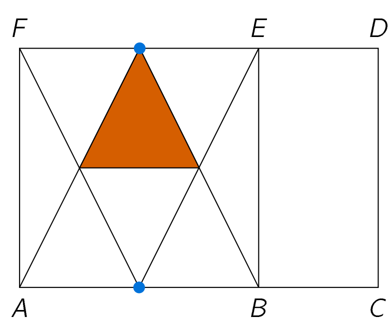
En cualquier triángulo, la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor que la longitud del tercer lado. Por ejemplo, los segmentos de medidas 2, 4 y 6 no pueden formar un triángulo, ya que $2+4$ no es mayor que 6.



Determinar la cantidad de triángulos cuyo perímetro sea 12 y cuyas longitudes de lados sean números naturales.

Problema 3

La siguiente figura está formada por el cuadrado $ABEF$ y el rectángulo $BCDE$, cuya base mide la mitad de su altura. El área coloreada es 2 cm^2 y los puntos azules son puntos medios de AB y EF. Determinar el área total de la figura.

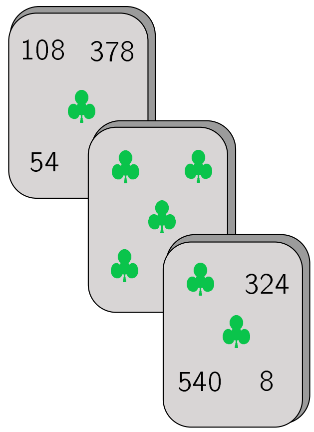


Problema 4

Un libro contiene acertijos numerados del 1 al 2024. Manuel empieza resolviendo el acertijo 6, luego el 12 y continúa resolviendo cada seis acertijos hasta el 2022. Nolvia, en cambio, comienza con el acertijo 2024, luego el 2017 y sigue resolviendo cada siete acertijos hasta llegar al 1. Determinar la cantidad de acertijos que queda sin resolver.

Problema 5

La figura muestra 3 placas con 5 números cada una. Se tiene la siguiente información: los números que se traslapan son iguales, la placa del medio tiene sus cinco números iguales y el trébol representa siempre el mismo valor. Si al sumar los 15 números el resultado es 2024, determinar el número que representa el trébol.



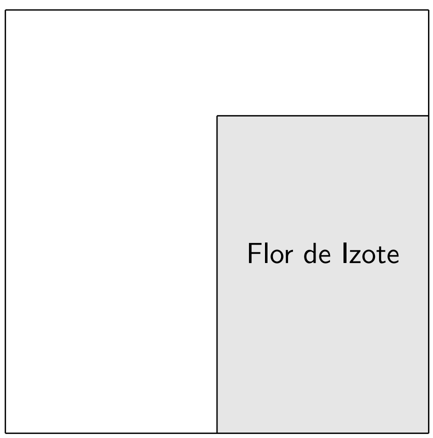
Quinto grado

Problema 1

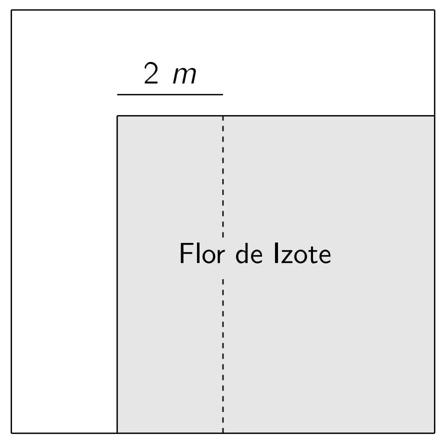
Dulce, la hormiga, recolecta azúcar para su familia. Inicialmente, tiene 8 cubos de azúcar y, cuando se encuentra con un tarro de azúcar, toma 8 trozos de azúcar y los deposita en su mochila. Cuando llega a los 2024 cubos de azúcar, se da cuenta de que es mucha azúcar para ella y su familia. Entonces, decide compartir su azúcar con el resto de las familias de hormigas. A partir de ese momento, cada vez que se encuentra con un tarro de azúcar, toma dos de los cubos de azúcar que tiene en su mochila y los deposita en el tarro de azúcar. Determinar cuántos cubos de azúcar tiene Dulce en su mochila después de encontrarse con un total de 500 tarros de azúcar.

Problema 2

Tres octavos de una finca cuadrada se dedican al cultivo de flor de Izote en 2024. Para 2025, se espera que la demanda de este cultivo aumente, por lo que se incrementó el ancho del terreno dedicado a dicho cultivo en 2 m. Después de este cambio, el terreno destinado al cultivo de la flor de izote tiene forma cuadrada y el área del terreno no utilizado para el cultivo disminuyó en 12 m^2. Determinar el perímetro de la finca.



Finca en el 2024.



Finca en el 2025.

Problema 3

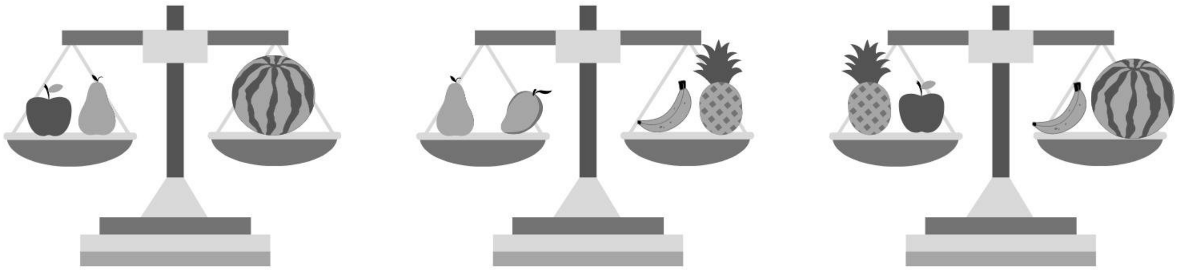
Adriana, Bessy, Cecilia, Damaris y Ena se dedican a profesiones diferentes. Se tiene la siguiente información:

- La enfermera no conoce a Cecilia, pero sí a Damaris y a la florista.
- Ena conoce a la abogada, a la chef y a la florista.
- La doctora conoce a la enfermera, pero no a Bessy.
- Adriana las conoce a todas.

Determinar la profesión a la que se dedica Cecilia.

Problema 4

Adolfo y Levi van de compras al mercado, donde notan la información que muestran las siguientes balanzas en equilibrio:



Adolfo compró dos piñas y una manzana, mientras que Levi compró dos bananas, una sandía y un mango. Si el mango es más liviano que la pera, determinar quién tiene la compra de mayor peso.

Problema 5

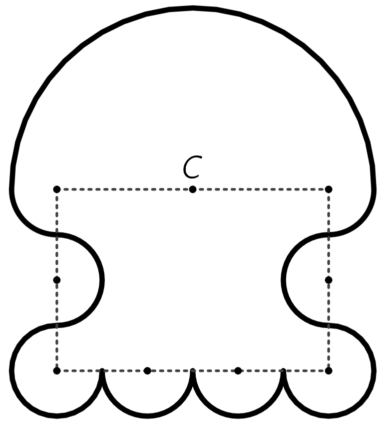
Paxcelly ordena tres dígitos entre 1 y 9 de mayor a menor, quedando exactamente en el orden: a, b, c. Luego, forma todos los posibles números de dos cifras con dichos dígitos: $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{ba}$, $\overline{ca}$ y $\overline{cb}$. Después nota que exactamente dos de los seis números son pares y exactamente tres son mayores que 72. Determinar todos los posibles valores del número $\overline{abc}$.

Nota: $\overline{abc}$ representa un número de tres cifras, donde a es la cantidad de centenas, b la de decenas y c la de unidades; similarmente, $\overline{ab}$ representa un número de dos cifras. Por ejemplo, si $a = 9$, $b = 7$ y $c = 3$, entonces $\overline{abc} = 973$, $\overline{ab} = 97$ y $\overline{cb} = 37$.

Sexto grado

Problema 1

En la figura, sobre un rectángulo se han marcados 9 puntos que corresponden a centros de circunferencias. El punto C es el centro de una circunferencia grande, mientras que el resto de puntos corresponden a circunferencias tangentes entre sí y que tienen radio 1 cm tal como se muestra. Determinar el perímetro de la figura.



Problema 2

Un dispositivo crea contraseñas aleatorias utilizando los dígitos 1 y 0, con la restricción que una contraseña no puede tener dos ceros consecutivos. Calcular el total de contraseñas distintas y de longitud 5 que el dispositivo puede generar.

Problema 3

Determinar todos los números impares de tres cifras $\overline{abc}$ que cumplen que c sea igual al cuadrado de a y que b sea un cuadrado o cubo perfecto.

Nota: $\overline{abc}$ representa un número de tres cifras, donde a es la cantidad de centenas, b la de decenas y c la de unidades. Por ejemplo, si $a = 9$, $b = 7$ y $c = 3$, entonces $\overline{abc} = 973$.

Problema 4

Un arreglo de números tiene 2024 filas. Las primeras 6 filas del arreglo son:

$$\mathbf{1}$$

$$\mathbf{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{3} \quad 1 \quad \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{4} \quad \frac{3}{2} \quad \mathbf{\frac{2}{3}} \quad \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{5} \quad 2 \quad \mathbf{1} \quad \frac{1}{2} \quad \mathbf{\frac{1}{5}}$$

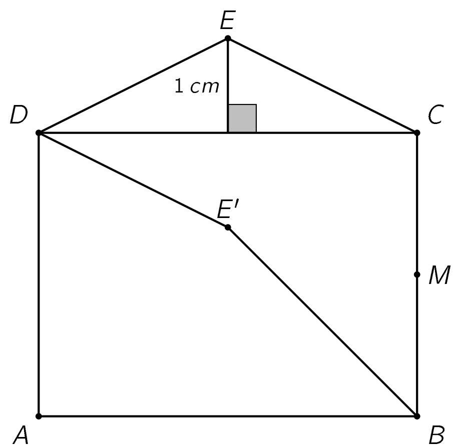
$$\mathbf{6} \quad \frac{5}{2} \quad \mathbf{\frac{4}{3}} \quad \frac{3}{4} \quad \mathbf{\frac{2}{5}} \quad \frac{1}{6}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

Determinar el número que aparece en la penúltima posición de la fila 2024.

Problema 5

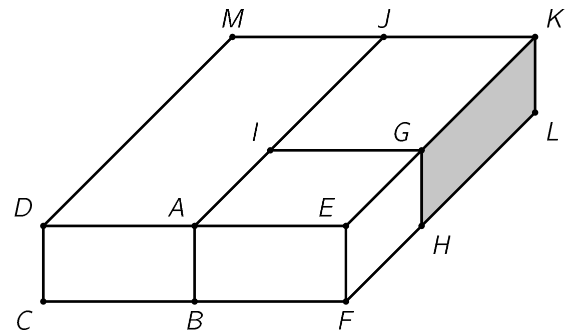
En la figura, $ABCD$ es un rectángulo y el triángulo isósceles DCE tiene altura $1\ cm$ y un área de $3\,cm^2$. Si el simétrico del punto E, respecto a $\overline{DC}$, está alineado con el punto medio M de $\overline{BC}$ y el punto D, calcular el área del cuadrilátero $ABE'D$.



Séptimo grado

Problema 1

La figura siguiente está formada por tres cajas y se sabe que $AB = 3\,cm$. El perímetro de $ABCD$ es $16\,cm$, el perímetro de $AEGI$ es 14 cm, el área de $ADMJ$ es 35 cm^2 y el área de $EFHG$ es 9 cm^2. Determinar el área del cuadrilátero $GHLK$.



Problema 2

Se sabe que los lados de un rectángulo están en proporción de 3 a 5. Ana toma tres de los lados de dicho rectángulo y suma sus medidas, obteniendo como resultado 91 cm. Carlos también toma tres lados del rectángulo, los suma y obtiene como resultado 77 cm. Determinar las medidas de los lados del rectángulo.

Problema 3

Luis escribe en su cuaderno una lista de números. Primero, escribe el número 0 y realiza los siguientes pasos:

Paso 1: suma una unidad al último número escrito y escribe el resultado.

Paso 2: resta 2 unidades al último número escrito y escribe el resultado.

Paso 3: suma 3 unidades al último número escrito y escribe el resultado.

Paso 4: resta 4 unidades al último número escrito y escribe el resultado.

Paso 5: suma 5 unidades al último número escrito y escribe el resultado.

Luego, continúa repitiendo los cinco pasos en el mismo orden hasta escribir 2024 números. De esta manera, los primeros ocho números de la lista son: $0, 1, -1, 2, -2, 3, 4, 2$. Determinar cuál es el último número en la lista de Luis.

Problema 4

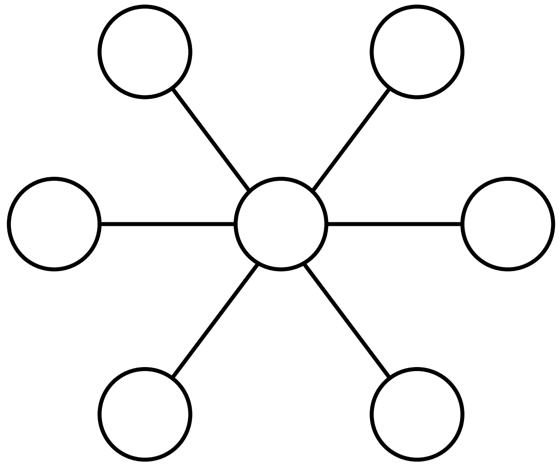
Vilma escribe todos los números de tres cifras que cumplen la siguiente propiedad: el dígito de las decenas es menor que el de las unidades y también menor que el de las centenas.

- Determinar si Vilma puede encontrar dos números en su lista cuya suma sea 777.
- Determinar si Vilma puede encontrar dos números en su lista cuya suma sea 876.

Para cada caso, si la respuesta es afirmativa, encontrar todas las parejas de números de la lista que lo cumplen.

Problema 5

Carlos coloca los números 4, 9, 10, 18, 20, 30, 45 en los círculos del siguiente diagrama de tal forma que el producto de cada tres números alineados es el mismo. Determinar el número que Carlos colocó en el círculo central.



Octavo grado

Problema 1

Jorge el caracol tiene una planta mágica que en un inicio tenía 2024 hojas. Cada día, Jorge ha elegido un número entero entre 1 y 9, inclusive, y ha comido esa cantidad de hojas de su planta, pero siempre ha evitado que al final de cada día, la cantidad de hojas que ha comido en total sume un múltiplo de 5 o una potencia de 4. Él continuará de esa manera hasta acabarlas. Si se sabe que Jorge tardará la mayor cantidad de días posible en comer todas las hojas de su planta, ¿cuántos días tardará en total?

Problema 2

Un número entero positivo de cuatro cifras es llamado *cuestecita* si el número formado por los primeros dos dígitos de la izquierda es cuatro unidades menor que el número formado por los dos últimos dígitos de la derecha. Por ejemplo, el número 2024 es cuestecita. Determinar todos los números que además de ser cuestecita, también cumplen las siguientes dos condiciones:

- Todos sus cuatro dígitos son distintos.
- El producto de sus cuatro dígitos es mayor que la suma de sus cuatro dígitos.

Problema 3

Tito Chacuatito tiene una forma curiosa de desplazarse. Cada vez que se mueve, con un solo salto realiza uno de los siguientes tipos de movimientos:

Tipo I: se desplaza al punto ubicado 20 *cm* para el este y 30 *cm* para el sur.

Tipo II: se desplaza al punto ubicado 10 *cm* para el oeste y 40 *cm* para el norte.

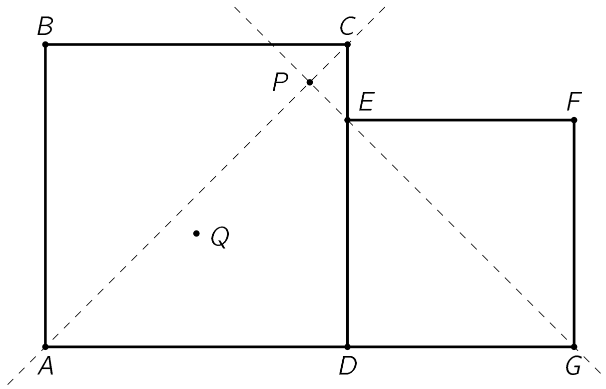
Sean a y b números enteros positivos, tales que $b - a$ es múltiplo de 5. Determinar si es posible que Tito consiga llegar con alguna combinación de varios de estos dos tipos de movimientos a cualquier punto que está $10a$ *cm* al este y $10b$ *cm* al norte, respecto del punto inicial.

Problema 4

En un cierto pueblito, durante la cosecha todos los gajos de todas las palmeras cocoteras siempre tienen la misma cantidad de cocos, siendo esta cantidad un número primo de un solo dígito. Claudia tiene en su terreno una sola fila de cocoteras y en la última cosecha notó que cada cocotera tenía tantos gajos como cocoteras hay en la fila. Además, en esa cosecha recolectó un total de N cocos, siendo N un número entero positivo de cuatro cifras, tal que dos de sus cifras son iguales entre sí y las dos cifras restantes también son iguales entre sí. Determinar todos los posibles valores para el número N.

Problema 5

Se tienen dos cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ de distinto tamaño, de manera que G está en la prolongación de $\overline{AD}$ y E está sobre el segmento $\overline{CD}$, como muestra la figura abajo. Sea Q el punto medio de $\overline{AE}$ y sea P el punto en que se cortan las rectas AC y GE.



Determinar la medida del $\angle DQP$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) Si E es el punto medio de $\overline{CD}$.

(b) Si E es un punto cualquiera sobre el segmento $\overline{CD}$.

Noveno grado

Problema 1

Determinar todos los enteros positivos de tres cifras $\overline{xyz}$ que satisfacen

$$\overline{xyz} = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}.$$

Nota: $\overline{xyz}$ representa un número de tres cifras, donde x es la cantidad de centenas, y la de decenas y z la de unidades. Similarmente, $\overline{xy}$ representa un número de dos cifras.

Problema 2

Karla es amante de la horchata, aunque también gusta mucho de la cebada. En principio tiene dos vasos, un vaso A con cebada y otro vaso B con horchata, no necesariamente con la misma cantidad, con los cuales quiere hacer una curiosa mezcla de *cebachata*. Toma una cucharada del vaso B, la vierte en el vaso A y mezcla. Luego, de esa mezcla en el vaso A, toma una cucharada, la vierte en el vaso B y mezcla. Denotamos por c la cantidad de horchata en el vaso A y por d la cantidad de cebada en el vaso B. Determinar si c es mayor, menor o igual que d.

Problema 3

Sean a y b números reales no nulos que cumplen la ecuación

$$ab + \sqrt{a^2 + b^2} = a + b.$$

Calcular el valor de $(a-2)(b-2)$.

Problema 4

Sea n un entero positivo y $f(n)$ el mayor exponente de 3 en la factorización prima de n. Determinar el valor de

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2024).$$

Problema 5

Sea ABC un triángulo con $\angle CAB = 60^\circ$. Sea D punto medio de $\overline{BC}$ y sea G punto medio de $\overline{AD}$. Se definen E y F como los pies de las alturas desde D hacia los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sea H la intersección de las perpendiculares por E y F a las rectas GF y GE, respectivamente. Probar que el triángulo EHF es equilátero.