XIV OLIMPÍADA
NACIONAL DE MATEMÁTICA 2014

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR · CENTRO AMÉRICA · HACIA LA LIBERTAD · 15 DE FEBRERO DE 1841 · POR LA CULTURA

Jóvenes TALENTO El Salvador

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XIV OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

DE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2014 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado inferior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado inferior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica de que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente en los gráficos.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpíada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PROCEDIMIENTO DE PARTICIPACIÓN EN LA DÉCIMA CUARTA OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA:

El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del **9 al 16 febrero**, registrar sus datos personales en el sitio web **www.jt.ues.edu.sv/pjt**, además deberá imprimir el comprobante de registro para presentarlo junto con las soluciones de los problemas publicados en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día lunes **17 de febrero**, a las 3:00 p.m. Las soluciones y comprobante deberán ser presentadas en un sobre de papel manila. Puede imprimir dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto, o para registrar sus datos en el sistema. Las pruebas se recibirán únicamente en la correspondiente Dirección Departamental. Puede consultarse en **www.mined.gob.sv** las direcciones y teléfonos de estas oficinas para mayor información.

LOS ESTUDIANTES DEBERÁN INGRESAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, dirección de correo electrónico. Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: código y nombre.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial el día sábado 8 de marzo del presente año**, la prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria de Oriente de la Universidad de El Salvador, según la procedencia de cada estudiante. Los concursantes convocados serán notificados en su Centro Educativo y alternativamente podrán consultar los listados publicados en **www.jt.ues.edu.sv/onm** o **www.mined.gob.sv** desde el día martes 4 de marzo de 2014, donde se especificará la facultad y aula donde cada estudiante realizará la prueba. **Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**
Ese mismo día se realizará una prueba psicológica, por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde la 8:30 a.m. hasta las 4:00 p.m.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con los cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos, e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el **Curso de Futuros Dirigentes Técnico Científicos**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de cuatro semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpíadas internacionales de Matemática, Biología, Física y Química. La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en **www.jt.ues.edu.sv/onm** o **www.mined.gob.sv** el día **martes 18 de Marzo de 2014**. La Academia Sabatina se inaugurará el **sábado 22 de marzo de 2014** en cada una de sus sedes y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la tarde. En las sedes de la Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental se atenderán únicamente los niveles del I al IV, es decir de cuarto a séptimo grado.
El Programa Jóvenes Talento invita a participar en las olimpiadas de ciencias. Mayor información: III Olimpiada Nacional de Biología visite: **jt.ues.edu.sv/onabi/**, VII Olimpiada Salvadoreña de Física visite: **jt.ues.edu.sv/osf/**, X Olimpiada Nacional de Química visite: **jt.ues.edu.sv/onq/**

XIV OLIMPÍADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2014

4° Grado

Problema - 1

En un edificio se numeraron todas las puertas de las oficinas utilizando placas que contenían un dígito cada una. Por ejemplo, para numerar la décimo cuarta puerta se utilizaron dos placas, una con el número 1 y otra con el 4. Si en total se utilizaron 35 placas, determine la cantidad de puertas numeradas.

Problema - 2

Julián, María, Nicolás y Luisa tienen una mascota cada uno, entre las siguientes: un gato, un perro, un pez y un canario. La mascota de María tiene pelo, la de Luisa cuatro patas, la de Nicolás es un ave y se sabe que a Julián y a María no les gustan los gatos. Determine que mascota tiene cada uno.

Problema - 3

Cien niñas se disponen a jugar pin-pon, para ello se sientan en sillas numeradas del 1 al 100. El juego tiene las siguientes reglas: si una niña está sentada en una posición par ella dice pin, si está sentada en una silla con número múltiplo de 3 ella dice pon, en otro caso dice el número de su silla. Así por ejemplo la primer niña dice uno, la segunda dice pin, la tercera dice pon, la cuarta dice pin, la quinta dice cinco, la sexta dice pin-pon, y continúan de esa manera. Determine la cantidad de niñas que dicen solamente pin, la cantidad que dicen solamente pon, la cantidad que dicen pin-pon y la cantidad que dicen un número.

Problema - 4

Un grupo de niños, uno de niñas y otro de perros juegan "vencidas" utilizando una cuerda, tirando de sus extremos. Se sabe que si 3 niños tiran de un extremo y 2 niños con 3 perros tiran del otro, sus fuerzas se equilibran. Además si un niño y un perro tiran de un extremo y 2 niñas tiran del otro, sus fuerzas también se equilibran. Suponiendo que los miembros de un mismo grupo tienen igual fuerza entre sí, determine la cantidad de perros que deben tirar de un extremo de la cuerda para equilibrar sus fuerzas con 3 niñas tirando del otro.

Problema - 5

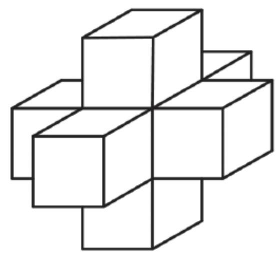
Dos piezas cuadradas y tres piezas rectangulares se acomodan para formar un rompecabezas cuadrado como muestra la figura. Si cada una de las dos piezas cuadradas tiene 72 cm de perímetro y las otras tres piezas son iguales entre sí. Determine el perímetro de cada una de estas tres piezas.

Problema - 2

En el tablero se quiere pintar cada cuadradito de rojo o de azul. Los dos cuadraditos de la izquierda no pueden ser rojos a la vez. Los dos cuadraditos de la derecha no pueden ser rojos a la vez. Determine el número de maneras distintas en que se puede pintar el tablero.

Problema - 3

Alejandro tiene siete dados con caras numeradas del 1 al 6. Toma uno de los dados y le pega los seis restantes de manera que los números en cada par de caras pegadas coincidan, obteniendo una pieza como se muestra en la figura. Determine la suma de los números en la superficie de la pieza.

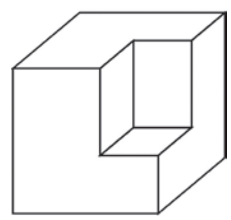


Problema - 4

Daniela participa en un juego que consiste en sacar 40 bolitas de una caja, las bolitas son blancas o negras. Las reglas dicen que ella recibirá ½ dólar por cada bolita blanca que saque y deberá pagar un dólar por cada bolita negra que saque. Si al final del juego ella ganó 2 dólares, determine la cantidad de bolitas blancas que Daniela sacó.

Problema - 5

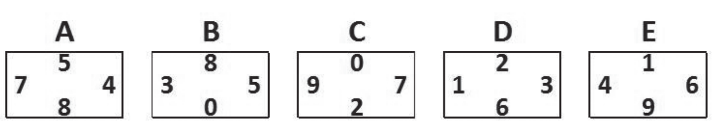
Haciendo cortes paralelos a las caras de un cubo de madera se obtiene una pieza como la que se muestra. Si el volumen original del cubo era $8m^3$, ¿cuál es la superficie de la pieza?

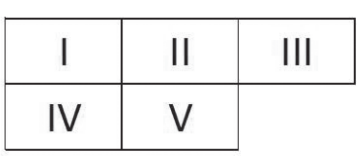


5° Grado

Problema - 1

En la figura se ven cinco rectángulos en los que cada lado está etiquetado con un número entero. Estos rectángulos se colocan, sin rotarlos ni darles la vuelta, en las posiciones I a V que se muestran abajo, de forma que las etiquetas en los lados que se tocan deben ser iguales. Determine qué rectángulo debe colocarse en la posición I. Argumente por qué esta es la única posibilidad.





6° Grado

Problema - 1

Determine cuántos números de cuatro cifras cumplen con las condiciones siguientes: el primer dígito del número es la cantidad de ceros que aparecen en él, el segundo dígito es la cantidad de unos que aparecen en él; de manera similar el tercer dígito es la cantidad de dos y el último dígito es la cantidad de tres.

Problema - 2

Los números naturales del 1 al 2014 se escriben en la tabla de siete filas que se muestra parcialmente en la figura, siguiendo el orden de la flecha. Determine en qué fila y en qué columna estará ubicado el número 2014.

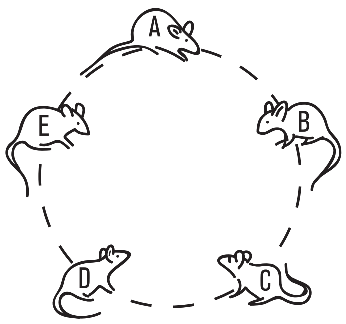
	1	2	3	4	5	6
A	1	14	15	28		
B	2	13	16	27		
C	3	12	17	26		
D	4	11	18	25		
E	5	10	19	24		
F	6	9	20	23		
G	7	8	21	22		

Problema - 3

En otoño un grupo de garzas emigran del norte al sur. Durante la emigración, $\frac{1}{8}$ de ellas desaparecen en el camino; de las restantes, $\frac{1}{4}$ pierden la vida en los cables eléctricos y $\frac{2}{3}$ del resto son abatidas por cazadores. Determine la cantidad inicial de garzas en el grupo antes de la emigración, si 672 llegaron al sur.

Problema - 4

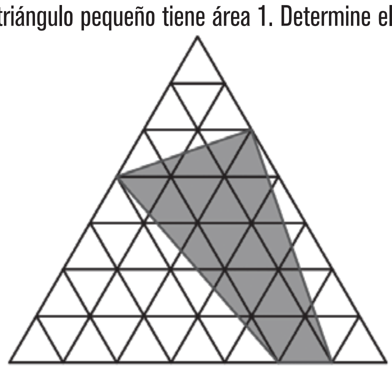
El gato Michu tomó una siesta, soñó que su dueño le decía: "Vamos Michu, puedes comer de los ratones: puedes iniciar comiendo cualquier ratón y enseguida debes comerte el quinto ratón contando en el sentido de las agujas del reloj, y siguiendo así hasta acabarlos". Michu soñó con el arreglo de cinco ratones que se muestra en la figura y comenzó comiendo el ratón A. Obedeciendo las instrucciones de su dueño, contó cinco ratones en sentido de las agujas del reloj: B, C, D, E, B y se comió el B, así el orden en que se los comió fue: A, B, D, E y C.



Si Michu hubiera soñado con catorce ratones marcados de la A a la N y además hubiera terminado por comer el ratón marcado con la letra M, determine por cuáles ratones pudo comenzar Michu a comer.

Problema - 5

En la siguiente figura cada triángulo pequeño tiene área 1. Determine el área de la región sombreada.



7° Grado

Problema - 1

Dos corredores de maratón se entrenan en el estadio durante 2 horas y media. Empiezan a correr juntos desde la línea de salida. Uno de ellos da una vuelta a la pista en 6 minutos y el otro en 8 minutos. Determine cuántas veces cruzan simultáneamente la línea de salida.

Problema - 2

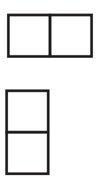
Determine cuántas cifras como máximo pueden ser borradas del número de 2000 cifras

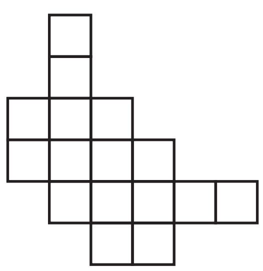
$$201420142014 \ldots 20142014$$

de manera que la suma de las cifras restantes sea 2014.

Problema - 3

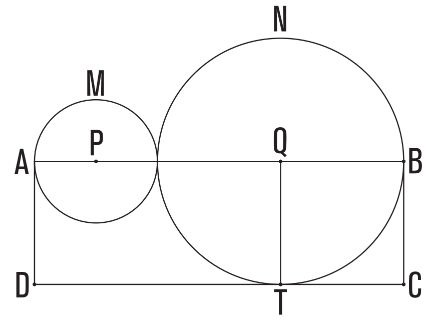
Cada cuadro del tablero mostrado a la derecha en la figura siguiente es de 1x1. Determine de cuántas formas se puede cubrir este tablero con rectángulos de 1x2 y 2x1 como los que se muestran a la izquierda, de manera que no hayan rectángulos que se traslapen y que ningún rectángulo se salga del tablero.





Problema - 4

En la figura, P y Q son los centros de las circunferencias tangentes M y N, respectivamente. Sean A y B los puntos donde la línea PQ corta a las circunferencias M y N, como se muestra en la figura. Se traza el rectángulo ABCD de manera que CD es tangente a N en T. Si el área de ABCD es 15. Determine el área del triángulo PQT.



Problema - 5

Un rectángulo de dimensiones 1102x950 es dividido en cuadros de 1x1. Determine a cuántos de estos cuadros corta una de las diagonales del rectángulo.

8° Grado

Problema - 1

Sea $p(n)$ el producto de las cifras de un número natural n, por ejemplo:

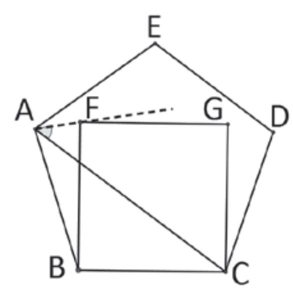
$$p(7) = 7$$
$$p(25) = 2 \cdot 5 = 10.$$

Determine el valor de la suma

$$p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(100).$$

Problema - 2

En la figura, ABCDE es un pentágono regular y BCGF es un cuadrado. Determine la medida del ángulo FAC.

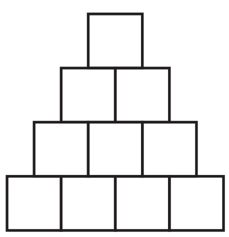


Problema - 3

Inicialmente hay un 1 en la pantalla de una computadora. Al presionar la tecla A, se multiplica por 3 el número de la pantalla. Al presionar la tecla B, se resta 1 al número de la pantalla. Utilizando una secuencia de teclas A y B hay que llegar a tener en la pantalla el 97. Determine el número mínimo de teclas que se deben presionar.

Problema - 4

La pirámide siguiente se llena colocando un *número entero* en cada casilla. Los cuatro números de la base deben cumplir que al sumarlos de como resultado 8 y los números de las demás casillas deben ser el resultado de sumar los números en las dos casillas que están justo debajo. Determine si es posible que el número en la casilla superior sea 7.



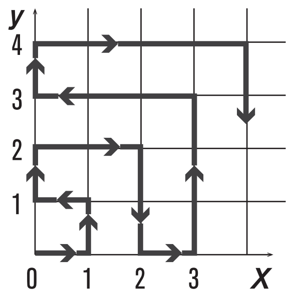
Problema - 5

En una fiesta hay 100 personas. La primera da la mano a una persona, la segunda a dos personas, la tercera a tres personas, así sucesivamente de manera que la nonagésima novena da la mano a noventa y nueve personas. Determine la cantidad de personas a las cuales le dió la mano la centésima persona.

9° Grado

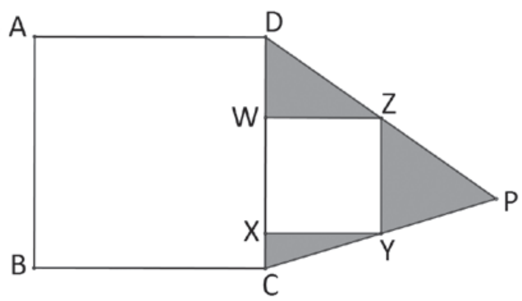
Problema - 1

Una partícula se mueve a través del primer cuadrante siguiendo el patrón que se indica en la figura. Durante el primer minuto se mueve desde el origen hasta (1,0), moviéndose una unidad de distancia paralela a un eje cada minuto. Determine en qué punto se encontrará la partícula después de exactamente 2 horas.



Problema - 2

Se tienen los cuadrados ABCD y WXYZ, con lado de longitud 2 y 1, respectivamente. El lado WX está sobre el lado DC, luego se trazan las rectas DZ y CY, que se cortan en P. Determine la razón entre el área sombreada y el área blanca.



Problema - 3

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que $1/n$ tiene la representación decimal $0.\overline{ab}=0.ababab\ldots$ con a y b dígitos distintos. Determine el valor de la suma de todos los elementos de S.

Problema - 4

Algunas personas se sientan alrededor de una mesa redonda. Se sabe que hay siete mujeres que tienen a su derecha a una mujer y doce mujeres que tienen a su derecha a un hombre. Además, tres de cada cuatro hombres tienen a su derecha a una mujer. Determine el número de personas sentadas alrededor de la mesa.

Problema - 5

Sean $a,\ b,\ c,$ enteros distintos de cero, $a\neq c,$ tales que:

$$\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$$

Demuestre que $a^2+b^2+c^2$ no puede ser un número primo.

Primer año

Problema - 1

Se tienen 11 cajas grandes. Algunas de ellas contienen, cada una, 8 cajas medianas y el resto están vacías. A su vez, algunas de las cajas medianas contienen, cada una, 8 cajas pequeñas y el resto están vacías. Todas las cajas pequeñas están vacías. Si hay 102 cajas vacías, determine el número total de cajas.

Problema - 2

Si las longitudes a, b y c de los lados de un triángulo satisfacen las condiciones

$$a+b-c=2$$
$$2ab-c^2=4$$

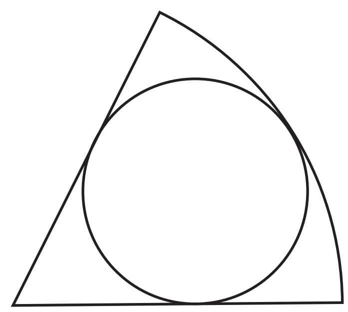
Demuestre que el triángulo es equilátero.

Problema - 3

Un cuadrado de área A está dividido en 102 cuadrados más pequeños, 101 de los cuales tienen lados de longitud 1. Determine todos los valores posibles para A.

Problema - 4

En la figura, la razón entre el radio del sector circular y el radio del círculo interior es 3:1. Si el círculo es tangente a los bordes del sector, determine la razón entre sus áreas.



Problema - 5

Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos y 6 octágonos. En cada vértice concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octágono. Considere los segmentos de recta que unen dos vértices del poliedro y determine cuántos de ellos no son aristas ni están contenidos en alguna cara del poliedro.

“HACIA LA LIBERTAD POR LA CULTURA”