



XV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA 2015



EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XV OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

SOBRE LA PRUEBA:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2015 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto sólo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la décima quinta Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente: El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que escoja en el período del **8 al 15 febrero**, registrar sus datos personales en el sitio web www.jt.ues.edu.sv/pjt/ además deberá imprimir el comprobante de registro para presentarlo junto con las soluciones de los problemas publicados en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día **lunes 16 de febrero**, a las 3:00 p.m para las zonas occidental, central, metropolitana y paracentral. Y para la zona oriental (Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión) a más tardar el día **jueves 19 de febrero** a las 3:00 p.m. Las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, debe imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido. El estudiante podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto o para registrar sus datos en el sistema, las pruebas se recibirán únicamente en la correspondiente Dirección Departamental, puede consultarse en www.mined.gov.sv las direcciones y teléfonos de estas oficinas para mayor información.

LOS ESTUDIANTES DEBERÁN INGRESAR LOS SIGUIENTES DATOS:

Nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, dirección de correo electrónico. Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: código y nombre.

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL:

Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una **prueba presencial el día sábado 7 de marzo del presente año**, la prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador, según la procedencia de cada estudiante. Los concursantes convocados serán notificados en su Centro Educativo y alternativamente podrán consultar los listados oficiales publicados en www.jt.ues.edu.sv/onm/ o www.mined.gob.sv desde el día martes 3 de Marzo de 2015, donde se especificará el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba. **Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar.**

Este mismo día se realizará una prueba psicológica, por lo que será necesaria la presencia de los estudiantes desde la ocho y media de la mañana hasta las cuatro de la tarde.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

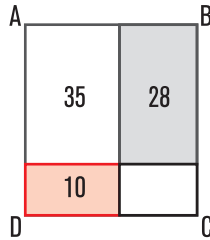
Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el **curso Futuros Dirigentes Técnicos Científicos**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física y Química. La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en www.jt.ues.edu.sv/onm/ o www.mined.gob.sv el día **martes 17 de marzo de 2015**. La Academia Sabatina se inaugurará el **sábado 21 de marzo de 2015** en el auditorium de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador a las 10:00 a.m. y este mismo día se iniciaran las actividades académicas por la tarde.

El Programa Jóvenes Talento invita a participar en las olimpiadas de ciencias. Mayor información: IV Olimpiada Nacional de Biología visite: www.jt.ues.edu.sv/onabi/, VIII Olimpiada Salvadoreña de Física visite: www.jt.ues.edu.sv/osf/, XI Olimpiada Nacional de Química visite: www.jt.ues.edu.sv/onq/

CUARTO GRADO

PROBLEMA 1

Con cuatro piezas rectangulares, de áreas 35, 28, 10 y una pieza de área desconocida, se forma el rectángulo ABCD como se muestra en la figura. Determine el área del rectángulo ABCD.



PROBLEMA 2

Las casillas 1 y 3 del tablero mostrado están pintadas de blanco, mientras que las casillas 2 y 4 están pintadas de gris. Cada determinado tiempo, una de ellas cambia de color, de blanco a gris o de gris a blanco, pero la numeración se mantiene. Si las casillas cambian en este orden: Primero cambia de color la casilla 1, luego la 2, después la 3, en seguida la 4 y de nuevo cambia la casilla 1, así sucesivamente. Determine el aspecto del tablero en el cambio número 2015.

Tablero inicial	Primer cambio	Segundo cambio												
<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table>	1	2	4	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table>	1	2	4	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table> ...	1	2	4	3
1	2													
4	3													
1	2													
4	3													
1	2													
4	3													

PROBLEMA 3

En el teatro del bosque, las filas tienen cuatro butacas numeradas del 1 al 4 cada una. Un día fueron doña ardilla, don conejo, don mapache y don ciervo, sentándose todos en la primera fila. Don mapache dijo "yo me sentaré en la butaca tres", los demás animalitos estuvieron de acuerdo y se sentaron. Desde un hueco, don cocodrilo, quien siempre miente dijo: "don mapache está sentado al lado de don conejo" y "doña ardilla está sentada entre don mapache y don conejo". Determine el animal que estuvo en la butaca 2.

PROBLEMA 4

En un tablero de 4×2 , se escriben dos números en la primera fila. En cada fila siguiente se escribe, la suma y la resta de los números escritos en la fila anterior, por ejemplo:

10	3
13	7
20	6
26	14

Se ha llenado otro tablero de 4×2 , con las mismas reglas que el anterior, de manera que los números que quedaron en la última fila son 64 y 60. Determine la suma de los números de la primera fila.

PROBLEMA 5

Carmen vende bolsos a \$20 cada uno y Federico tiene 25 pares de sandalias y las vende a \$15 el par. Deciden intercambiar durante tres días seguidos sus productos de manera que ninguno salga ganando ni perdiendo. Determine la cantidad de pares de sandalias que dará Federico a Carmen y la cantidad de bolsos que recibirá a cambio, si cada día fue una cantidad diferente de artículos intercambiados.

QUINTO GRADO

PROBLEMA 1

Karen invitó a diecisiete amigos a su fiesta de cumpleaños. Asignó a cada invitado un número del 2 al 18, reservándose el 1 para ella misma. Cuando todo el mundo estaba bailando, se dio cuenta de que la suma de los números de cada pareja era un cuadrado perfecto. Determine el número que tiene la pareja de Karen.

Un cuadrado perfecto es el resultado de multiplicar un número entero por sí mismo. Por ejemplo $9=3 \times 3$.

PROBLEMA 2

Se realiza una rifa para recaudar fondos. Se tienen números del 1 al 1000 repartidos en listas de 10 números cada una. Antes de la rifa, se venden todos los números. Al finalizar el sorteo resultó que todos los que tenían un número terminado en 3, ganaron un vale de supermercado por \$8. Todos los que tenían un número terminado en 47 ganaron un libro de \$12. El poseedor del número 28 ganó un equipo de sonido de \$340. Los demás números no obtuvieron premio. Descartando el precio de los premios quedó una ganancia de \$740. Determinar el precio de cada lista.

PROBLEMA 3

Iniciando con los números 1, 5 y 11 se forma la siguiente secuencia de figuras:

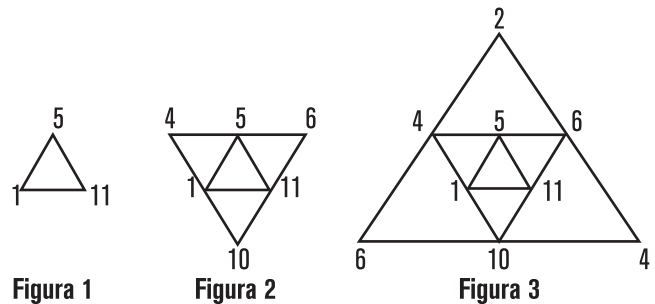


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Determine los números que aparecen en los vértices del triángulo más grande en la figura 2015.

PROBLEMA 4

La siguiente figura se armó con piezas cuadradas y rectangulares colocadas en forma alternada, comenzando por una pieza rectangular cuyos lados miden $2m$ y $1m$. Cada pieza se puede armar con dos piezas iguales a la que tiene a la izquierda. Calcule el perímetro de la figura.



PROBLEMA 5

Andrea se encontraba en el bosque del olvido y había olvidado qué día era. Un oso que miente los lunes, martes y miércoles pero dice la verdad los otros días le dijo: "ayer fue uno de los días que me tocaba mentir". Un unicornio que miente los jueves, viernes y sábados pero dice la verdad los otros días le dijo: "ayer fue uno de los días que me tocaba mentir". Determine qué día era.

SEXTO GRADO

PROBLEMA 1

Lourdes debe numerar consecutivamente las sillas de un salón comenzando desde 1, para esto dispone de veintidós tarjetas autoadhesivas con el dígito 2 y una cantidad ilimitada de tarjetas autoadhesivas con los demás dígitos. Por ejemplo, para numerar la silla 23 debe usar dos tarjetas, una con el dígito 2 y otra con el 3, determine hasta qué número de silla puede numerar Lourdes.

PROBLEMA 2

Las figuras muestran opciones de colocar dos alfombras rectangulares idénticas sobre un piso cuadrado de 20 metros de perímetro. Si el ancho de las alfombras es 80 centímetros, calcule el área que queda descubierta en la Figura 2.

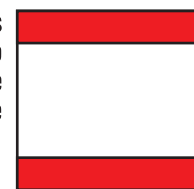


Figura 1

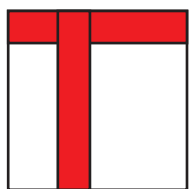
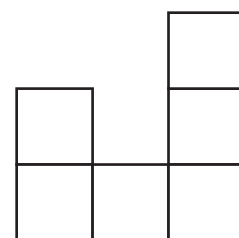


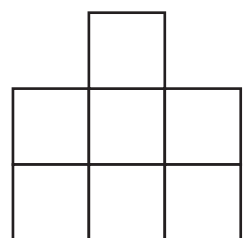
Figura 2

PROBLEMA 3

Kevin ha construido un cuerpo geométrico utilizando cubos idénticos cuyas caras están pintadas de blanco. La figura muestra dos vistas de la construcción, una desde el lado izquierdo y otra desde el frente. Luego Kevin pinta de color azul todas las caras exteriores de la construcción y después lo desarma. Determine cuántas caras blancas quedaron considerando que se han utilizado la mayor cantidad posible de cubos.



Vista lado izquierdo



Vista de frente

PROBLEMA 4

Ariel, Byron, Carlos y Dennis son científicos. Uno de ellos es físico, otro químico, otro biólogo y otro matemático, no necesariamente en ese orden. Si se tiene la siguiente información:

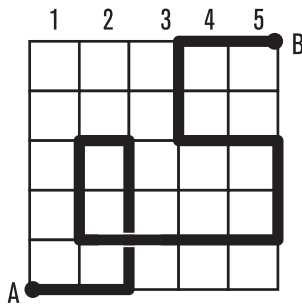
- Dennis desayuna con el matemático.
- El químico es amigo de Byron, pero nunca han ido a comer juntos.
- El físico almuerza con Dennis y no conoce a Carlos.
- Ariel no es físico.

Determine quién es el matemático.

PROBLEMA 5

Alejandro hace caminos que van desde el vértice A hasta el B moviéndose sobre las líneas de la cuadrícula de 5x5 que se muestra en la figura. Cada vez que se mueve en sentido horizontal, Alejandro anota el número de la columna que atraviesa y al llegar a B calcula el producto de los números anotados.

Para el camino de la figura el producto es $1(2)(2)(2)(3)(4)(5)(5)(4)(4)(5)=192000$. Determine si existen caminos para los cuales el producto obtenido sea 12000 y 2160. Dibuje los caminos en caso que existan y sino explique por qué no existen



SÉPTIMO GRADO

PROBLEMA 1

La señora Materácrida es una araña matemática. Ella tejerá una telaraña en una base de ocho hilos A, B, ..., H como lo indica la figura 1.

La figura 2 muestra que comienza tejiendo en el hilo A y después de tejer 6 lados se encuentra en el hilo G, y después de tejer 11 lados más se encuentra en el hilo B. Siguiendo con el patrón, determine en cuál hilo estará y cuántas vueltas habrá dado la señora Materácrida después de tejer 2015 lados. Se cuenta una vuelta cada vez que regresa tejiendo al hilo A.

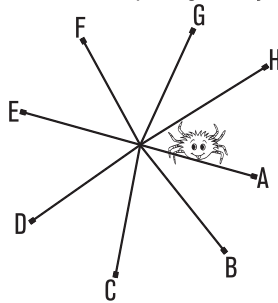


Figura 1

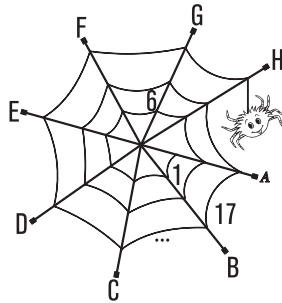


Figura 2

PROBLEMA 2

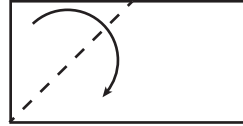
Se escriben números naturales en filas: en la primera fila está solo el número 2, en la segunda fila están los números 5 y 6, así sucesivamente.

2						
5	6					
8	9	10				
11	12	13	14			
14	15	16	17	18		
17	18	19	20	21	22	
20	21	22	23	24	25	26

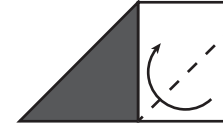
Siguiendo esta construcción, determine cuál número ocupa el último lugar de la derecha en la quincuagésima fila.

PROBLEMA 3

Un rectángulo se dobla en dos ocasiones, siguiendo las líneas punteadas como muestran las figuras. Si el perímetro del rectángulo en el Paso 1 es 44 cm y el perímetro del rectángulo blanco del Paso 3 es 16 cm, determine el área del rectángulo del Paso 1.



Paso 1



Paso 2



Paso 3

PROBLEMA 4

Después de realizar correctamente la siguiente multiplicación se ocultaron algunos dígitos con asteriscos, revelar todos los dígitos ocultos.

$$\begin{array}{r}
 * * * * * \times * * * * * \\
 \hline
 23101 \\
 * * * * * \\
 * * * * * \\
 * * * * * \\
 \hline
 * * * 2015 * *
 \end{array}$$

PROBLEMA 5

Se escriben siete números enteros en forma circular tales que cada pareja de números adyacentes cumplan con la condición que alguno de ellos es múltiplo del otro. Comprobar que para cualesquiera siete números cumpliendo está condición también hay al menos dos números no adyacentes con la misma condición, es decir uno de ellos es múltiplo del otro.

OCTAVO GRADO

PROBLEMA 1

Sobre una mesa se ubican tres tazas, con uno de los rótulos: café, leche o chocolate. En las cuales se servirán esas tres bebidas. Después de servir las bebidas, una de las tres personas que tomaba su bebida, observa que ninguna corresponde al rótulo de la taza; la persona que tomaba café dijo que eso no importaba, puesto que tenía la bebida que había pedido; puede dar lugar a equivocarse, dijo la persona con la taza que tenía el rótulo leche.

Si la persona que observó la situación no tomaba chocolate. ¿Cuál es la bebida de la persona que tiene la taza con el rótulo de café?

PROBLEMA 2

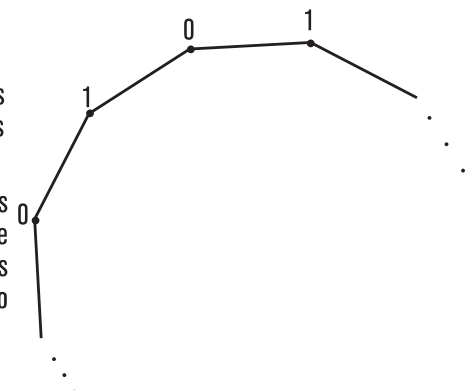
Determine la cantidad de enteros positivos de tres cifras los cuales cumplen que tanto el número como su triple tienen solo dígitos pares. Por ejemplo, uno de estos números es 802 que tiene solamente dígitos pares y su triple 2406 también.

PROBLEMA 3

Sobre los vértices de un polígono regular de n lados con $n < 7$, se ubican los números: 1, 0, 1, 0, ... empezando con 1, como muestra la figura. Además, se definen las siguientes operaciones:

- Sumar 1 a dos vértices adyacentes
- Restar 1 a dos vértices adyacentes

Determine los valores de n para los cuales es posible que, después de aplicar sucesivamente esas operaciones en algún orden, los números que quedan en los vértices del polígono cumplen que su suma es 2015.



PROBLEMA 4

Sobre una recta, se ubican los puntos: $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n$ en ese orden. De modo que:

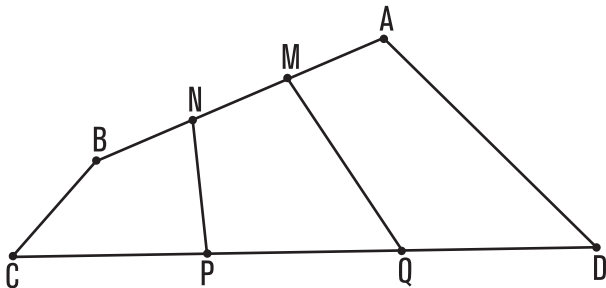
a) $\overline{P_1 P_3} + \overline{P_2 P_4} + \overline{P_3 P_5} + \dots + \overline{P_{n-2} P_n} = 3332$

b) La longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de los segmentos $\overline{P_1 P_{n-1}}$ y $\overline{P_2 P_n}$ es 2015 unidades.

Con estos datos, calcule la longitud del segmento $\overline{P_1 P_n}$.

PROBLEMA 5

Dado el cuadrilátero ABCD, los puntos M y N dividen el lado AB en 3 segmentos de igual longitud; los puntos P y Q dividen el lado CD en 3 segmentos de igual longitud, como lo muestra la figura. Si el área del cuadrilátero ABCD es 120 m^2 . Calcule el área del cuadrilátero MNPQ.



NOVENO GRADO

PROBLEMA 1

Ernesto tiene el número 5 escrito en su cuaderno, piensa dos números naturales que sumados den 5 y escribe en su cuaderno el resultado de multiplicar los dos números que pensó, con este nuevo número hace lo mismo, piensa dos números naturales que sumados den ese último número y escribe en su cuaderno el resultado de multiplicarlos, y así sucesivamente.

Muestre cómo es posible obtener el número 19 con ese procedimiento.

Justifique si es posible obtener el número 2015 y en caso de ser posible, describa la manera de obtenerlo.

PROBLEMA 2

Considere en orden creciente, la sucesión de números naturales que no son múltiplos de 3:

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$$

y la sucesión:

$$1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 4 = 7, 1 + 2 + 4 + 5 = 12, \dots$$

Determine los números que ocupan la posición 2015 en cada una de las sucesiones.

PROBLEMA 3

En un planeta existen 3 tipos de cipotes. Los chintalala, los capiruchos y los chibolas. El primero miente cuando llueve y dice la verdad cuando no llueve. El segundo siempre miente; el tercero siempre dice la verdad. Cierta día el Cipitío se encontró con 4 cipotes que dijeron:

El primero dijo: Hoy está lloviendo

El segundo: El cipote que acaba de hablar está mintiendo

El tercero: Hoy no está lloviendo

El cuarto: El primer cipote mintió o soy un chintalala

¿Con cuántos chintalala habló el Cipitío como máximo?

PROBLEMA 4

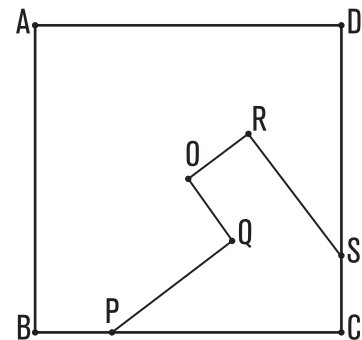
Miguel decide pesar sus 5 trompos, todos con pesos enteros. Al pesarlos en grupos de 3 de todas las maneras posibles, obtuvo:

10, 14, 15, 16, 17, 17, 18, 21, 22, 24.

Determine el peso de cada uno de los cinco trompos.

PROBLEMA 5

El cuadrado ABCD tiene área 64 m^2 con centro el punto O, el segmento PQ es perpendicular a OQ, que es perpendicular a OR, que es perpendicular a RS, además $OR=OQ=2 \text{ m}$ y $RS=PQ=4 \text{ m}$. Calcule las áreas del trapecio ORSQ y del cuadrilátero PQSC.



DÉCIMO GRADO

PROBLEMA 1

Cuántas cadenas de 10 dígitos hay, tales que todos sus dígitos sean solamente ceros o unos y la suma de sus dígitos de lugar par sea igual a la suma de los dígitos de lugar impar.

PROBLEMA 2

Encuentre todas las parejas (x,y) de enteros no negativos, tales que $x! + 24 = y^2$, donde $x!$ es el factorial de x .

PROBLEMA 3

Se considera una función f tal que:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(1) = 2015$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

Determine el valor de $f(2015)$.

PROBLEMA 4

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$, y sean D el punto medio de BC, E el pie de la perpendicular a AB por D y F el punto medio de DE. Demuestre que AF es perpendicular a CE.

PROBLEMA 5

En una isla hay solo dos tribus: los Mienteretes que siempre mienten y los Veritas que siempre dicen la verdad. Determinado día hay una asamblea a la que concurren 2015 habitantes de la isla. Se sientan al azar formando un círculo y cada uno declara: "las dos personas que tengo a mi lado son Mienteretes". Al día siguiente se continúa con la asamblea pero uno de ellos se enfermó, por lo cual asisten 2014 habitantes, nuevamente se sientan al azar formando un círculo y cada uno declara: "Las dos personas que tengo a mi lado son de la misma tribu, que no es la mía".

Deducir el número de habitantes de cada tribu y el tipo de habitante al que pertenece el enfermo.

“HACIA LA LIBERTAD POR LA CULTURA”