XVI Olimpiada Nacional de MATEMÁTICA 2016

EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y LA UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR INVITAN A LAS Y LOS JÓVENES DEL SISTEMA EDUCATIVO NACIONAL A PARTICIPAR EN LA XVI OLIMPIADA NACIONAL DE MATEMÁTICA

SOBRE LA PRUEBA

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde cuarto grado hasta primer año de bachillerato. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa en el año 2016 o pruebas de grados superiores. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos de un grado anterior al grado que cursa el estudiante. Los estudiantes que pertenecen al sistema bilingüe deben resolver la prueba del grado en que finalizarán este año.

- No habrá restricciones a la participación de estudiantes que pertenezcan a un grado anterior al cuarto.
- La participación de todo estudiante será válida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Puede, sin embargo, hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas, numeradas y con su nombre.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. En tal sentido, aquellas participaciones en las que sólo aparezcan las respuestas, no serán tomadas en cuenta. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es indispensable enviar la solución de los cinco problemas del grado correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, sin tachaduras y lo más aseado posible.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo o pluma. No se aceptarán soluciones a lápiz. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN

El procedimiento de participación en la décimo sexta Olimpiada Nacional de Matemática es el siguiente: El alumno deberá resolver los problemas de la prueba del grado que le corresponde en el período del **14 al 21 febrero**, registrar sus datos personales en el sitio web **www.jt.ues.edu.sv/pjt/** además deberá imprimir el comprobante de registro para presentarlo junto con las soluciones de los problemas publicados en las oficinas de la Dirección Departamental correspondiente del Ministerio de Educación, a más tardar el día **lunes 22 de febrero**, a las 3:00 p.m. para las zonas occidental, central, metropolitana y paracentral. Y para la zona oriental (Usulután, San Miguel, Morazán y La Unión) a más tardar el día **miércoles 24 de febrero,** a las 3:00 p.m. Las soluciones y comprobante de registro deberán ser presentadas en un sobre de papel manila, debe imprimirse dos comprobantes: uno para colocarlo como carátula del sobre y el otro para ser sellado y firmado por la persona responsable del MINED, como constancia del material recibido. El estudiante puede llevarlo personalmente o podrá solicitar la colaboración de sus profesores y/o del Director de la Institución para hacer llegar su examen a la Dirección Departamental correspondiente dentro del plazo previsto o para registrar sus datos en el sistema, las pruebas se recibirán únicamente en la correspondiente Dirección Departamental, puede consultarse en **www.mined.gov.sv** las direcciones y teléfonos de estas oficinas para mayor información.

INGRESO DE DATOS

LOS ESTUDIANTES DEBERÁN INGRESAR LOS SIGUIENTES DATOS: Nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector (urbano o rural), dirección, nombre de la persona responsable, teléfono, dirección de correo electrónico. Además deberá presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenece: código y nombre.

LA PRUEBA PRESENCIAL

ACERCA DE LA PRUEBA PRESENCIAL: Las mejores participaciones de cada grado que alcancen el puntaje requerido para clasificar, deberán realizar una prueba presencial el día **sábado 12 de marzo** del presente año, la prueba se administrará en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, Facultad Multidisciplinaria de Occidente y Facultad Multidisciplinaria Oriental de la Universidad de El Salvador, según la procedencia de cada estudiante. Los concursantes convocados serán notificados en su Centro Educativo y alternativamente podrán consultar los listados oficiales publicados en **https://jovenestalento-public.sharepoint.com** o **www.mined.gob.sv** desde el día **martes 8 de Marzo** de 2016, donde se especificará el lugar y aula donde cada estudiante realizará la prueba presencial. Para promover la participación del mayor número de instituciones, de los participantes de cada grado de cada institución, únicamente podrán ser convocados a lo sumo los mejores cinco estudiantes que alcancen el puntaje requerido para clasificar. Este mismo día se realizará una prueba psicológica de carácter obligatoria para todos aquellos estudiantes que participan por primera vez, dicha prueba se realizará después de finalizar la prueba presencial.

PROGRAMA JÓVENES TALENTO

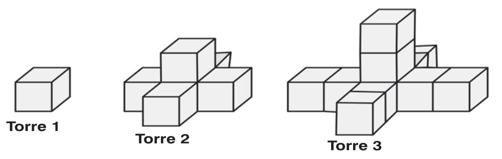
INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO: Las mejores participaciones de la prueba presencial serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación desarrolla en cooperación con la Universidad de El Salvador. El Programa Jóvenes Talento tiene diferentes componentes con las cuales se pretende dar respuesta a la necesidad de descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcarles a partir de ese nivel la disciplina, el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, desarrollarles capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, en días sábados; el segundo es un curso intensivo de tres semanas que se desarrolla al finalizar el año escolar. La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además la de preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Matemática, Biología, Física y Química. La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en **https://jovenestalento-public.sharepoint.com** o **www.mined.gob.sv** el día **martes 29 de marzo de 2016**. La Academia Sabatina se inaugurará el **sábado 2 de abril de 2016** en el auditórium de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad de El Salvador a las 10:00 a.m. y este mismo día se iniciarán las actividades académicas por la tarde.

El Programa Jóvenes Talento invita a participar en la V Olimpiada Nacional de Biología, IX Olimpiada Salvadoreña de Física y XII Olimpiada Nacional de Química, para más información visite: https://jovenestalento-public.sharepoint.com

CUARTO GRADO

PROBLEMA 1

Francisco construye torres con cubos de lego, empieza con una torre de un cubo y las siguientes torres se forman como indica la figura.



Determina si Francisco podrá construir una torre siguiendo esa forma de construcción utilizando exactamente 2016 cubos, explica tu respuesta.

PROBLEMA 2

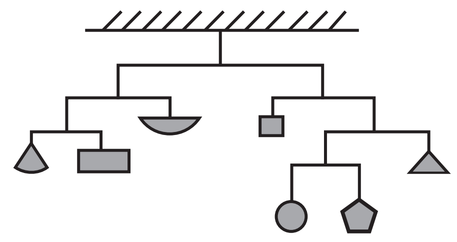
Los números naturales se ordenan en columnas, como lo muestra la imagen.

Determinar la columna en la que se encuentra el número 2016.

A	B	C	D	E	F	G
1		2		3		4
	5		6		7	
8		9		10		11
	12		13		14	
15		16		17		18
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

PROBLEMA 3

La figura muestra un móvil en equilibrio. El peso total de las 7 figuras es de 112 gramos. Determinar el peso en gramos del círculo.



PROBLEMA 4

María, Rosita y Sandra son muy buenas amigas. Cada una de ellas tiene un hermano mellizo. Para el día de San Valentín, cada chico invita a una de las amigas de su hermana.

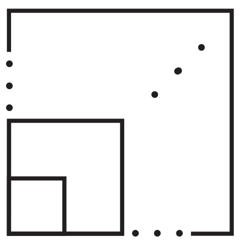
Los primeros en llegar al cine fueron María y el hermano de Sandra, en ese momento aparece otra pareja y María dice: ¡Mira!, ahí viene alguien con tu invitada. Determinar a quién invitó cada chico.

PROBLEMA 5

Con alambre se construyen varios cuadrados de forma tal que el lado de cada cuadrado es el doble que el cuadrado anterior. Las medidas de los lados de los cuadrados siempre son números naturales.

Si queremos que el lado del cuadrado mayor sea 2016 *cm*, ¿cuál es la menor medida que puede tomar el lado del cuadrado más pequeño?

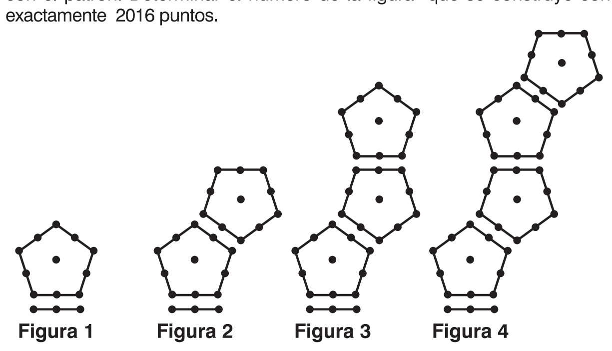
Determinar en *cm* la cantidad de alambre que se utilizará para la construcción.



QUINTO GRADO

PROBLEMA 1

Cada una de las siguientes figuras ha sido construida con puntos. Si se continúa con el patrón. Determinar el número de la figura que se construye con exactamente 2016 puntos.

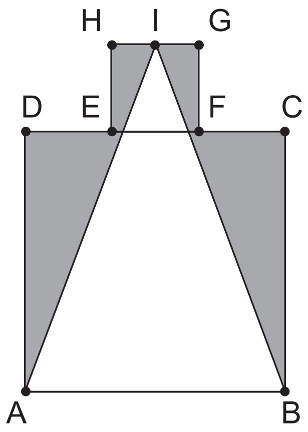


PROBLEMA 2

Se sabe que siete galletas de avena cuestan lo mismo que catorce galletas de chocolate y también se sabe que doce galletas de vainilla cuestan lo mismo que dos galletas de avena. Determinar cuántas galletas de vainilla cuestan lo mismo que una de chocolate.

PROBLEMA 3

Un grupo de caníbales están emigrando de la aldea Lento a la aldea Deprisa. Ellos caminan 5km por hora y cada vez que han recorrido un número de kilómetros múltiplo de 9, desaparecen la mitad de los caníbales que hay en ese momento. Si al iniciar habían 2016 caníbales y solo llegan a su destino 63. Determinar el número de horas que tardaron los 63 caníbales que quedaron en llegar a la aldea Deprisa.



PROBLEMA 4

La figura adyacente está formada por el cuadrado *ABCD* y el cuadrado *EFGH*, donde se cumple que $DE = EF = FC$ y $HI = IG$.

Si $AB = 6$ *cm*, determinar el área de la región sombreada.

PROBLEMA 5

Wendy llegó al país de Nunca Jamás y se encontró con una oruga que dice la verdad los lunes, miércoles, viernes y sábado, y el resto de los días miente. Además la oruga se vuelve de color verde los días que miente y de color rojo el resto de los días. Cierto día la oruga dice exactamente las siguientes afirmaciones.

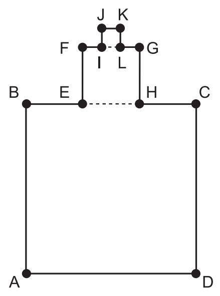
- Ayer no era de color rojo.
- Mañana mentiré.
- Pasado mañana seré verde.

Determinar el día de la semana en el cual la oruga dijo estas afirmaciones.

SEXTO GRADO

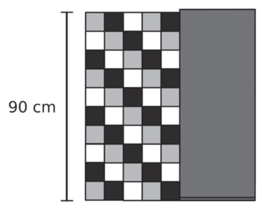
PROBLEMA 1

En el cuadrado *ABCD*, los puntos *E* y *H* dividen el lado *BC* en tres segmentos de igual longitud y en el cuadrado *EFGH* los puntos *I* y *L* dividen el lado *FG* en tres segmentos de igual longitud. *IJKL* también es cuadrado. Si *AB* mide 6 *cm*, calcular el perímetro de la figura compuesta por los tres cuadrados.



PROBLEMA 2

En la figura se muestra una alfombra rectangular con un diseño de cuadrados blancos, negros y grises, parcialmente desenrollada. La alfombra mide 90 *cm* de ancho, 2016 *cm* de largo y, como puede observarse, a lo ancho cada fila tiene 10 cuadrados. Determinar el número de cuadrados negros que tiene la alfombra y la fracción que representan del área total.



PROBLEMA 3

En el siguiente tablero se debe colocar en cada casilla un número natural del 1 al 7, de manera que cada columna tenga sus siete números diferentes y que al sumar los tres números de cada fila el total sea siempre el mismo número representado por la letra F. Si el total de sumar los números de cada columna se representa con la letra C, calcular el valor de C+F y mostrar una manera de llenar el tablero cumpliendo con las condiciones descritas.

			F
			F
			F
			F
			F
			F
			F
C	C	C	

PROBLEMA 4

Los habitantes de Primolandia juegan a lanzarse globos con agua de la manera siguiente:

- Hacen un sorteo para asignar a cada participante un número primo.
- Un participante solo puede lanzar globos a otro que tenga asignado un número que deja residuo 1 al dividirlo entre el suyo.

En la Figura 1, se muestra el esquema de juego de cuatro habitantes si tuvieran asignados los números 2, 13, 19 y 53.

En la Figura 2, se muestra un esquema de juego de cinco habitantes. Determinar el número asignado a Karen, Manuel, Diana y Luis, si el número de Edward es 41231 y el número de Diana es mayor que el de Manuel pero menor que el de Luis.

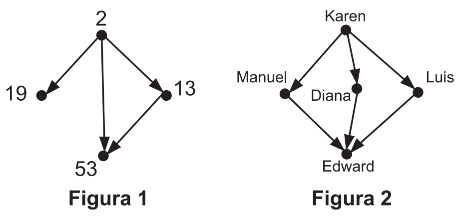


Figura 1

Figura 2

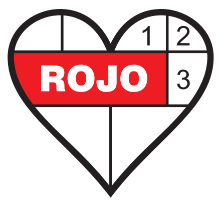
PROBLEMA 5

Alicia en el país de las maravillas se encuentra con 77 cusucos sentados alrededor de una mesa circular. El sombrerero loco le había advertido a Alicia que algunos cusucos de ese país son honestos y siempre dicen la verdad mientras que otros son deshonestos y siempre mienten. Alicia le preguntó a cada cusuco de que tipo eran los dos que estaban sentados junto a él, a su izquierda y derecha, y la respuesta de todos fue: "De los dos que están sentados junto a mí, uno de ellos es honesto y el otro es deshonesto". ¿Cuántos de los cusucos sentados alrededor de la mesa eran honestos?

SÉPTIMO GRADO

PROBLEMA 1

María va a colorear un corazón con ocho zonas para regalárselo este día a su novio Mario. Para colorear el corazón María dará un color a cada zona de manera que zonas adyacentes tengan diferente color (dos zonas son adyacentes si tienen alguna porción de algún lado recto en común, por ejemplo en la figura mostrada las zonas 1 y 3 no son adyacentes, mientras que las zonas 2 y 3 son adyacentes).

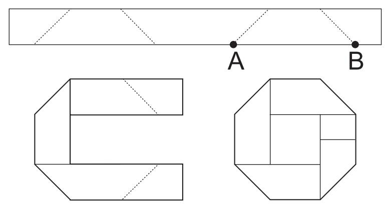


Ha comenzado coloreando de rojo una zona. Determinar la cantidad de formas distintas en las cuales María puede terminar de colorear el corazón, si utiliza los colores rojo, rosado y morado.

PROBLEMA 2

Una tira de papel rectangular de 10 *cm* de largo y 1 *cm* de alto se dobla para formar un octágono de manera que la figura en el centro sea un cuadrado, tal y como se muestra en la siguiente figura

Calcular la longitud *AB*.



PROBLEMA 3

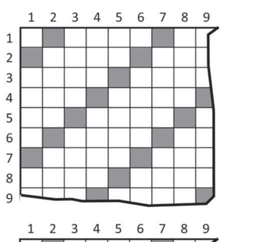
Marta y Juana estaban viendo la televisión junto con sus amigas Diana y Nancy. De repente, escuché un estruendo y muchos gritos. Corrí a averiguar lo que estaba pasando, y encontré la televisión en el suelo ¡rodeada de vidrios rotos! Diana y Juana hablaban casi al mismo tiempo:

- Juana diciendo: "¡No fui yo!".
- Diana diciendo: "¡Fue Nancy!".
- Marta gritó: "¡No, fue Diana!".
- Con un rostro de inocencia y humildad, Nancy dijo: "Diana miente".

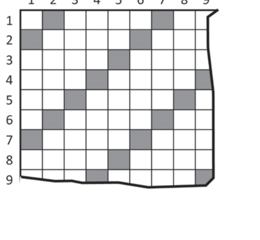
Si sólo una de ellas estaba diciendo la verdad ¿quién derribó la televisión?

PROBLEMA 4

Las casillas de una cuadrícula de *2016* x *2016* se pintan en diagonal de la siguiente manera:



Luego se pintan las filas y columnas que son múltiplo de 3



¿Cuántas casillas de la cuadrícula han quedado sin pintar?

PROBLEMA 5

En una competencia, la suma de los puntajes de Bárbara y Doris es igual a la suma de los puntajes de Ana y Carolina. Si los puntajes de Bárbara y Carolina se intercambiaran, entonces la suma de los puntajes de Ana y Carolina excedería la suma de los puntajes de las otras dos. También, el puntaje de Doris excede la suma de los puntajes de Bárbara y Carolina. Determinar en qué posición termina cada competidora asumiendo que todos los puntajes son no negativos y desconocidos.

OCTAVO GRADO

PROBLEMA 1

En un cuadrado *ABCD* de lado uno se traza la diagonal *AC*. Se une el vértice *D* con el punto medio *M* del lado *BC*. Sea *P* el punto de corte de *MD* y *AC*. Calcular la razón entre las áreas del cuadrilátero *ABMP* y el triángulo *CDP* si la distancia del punto *P* al lado *AB* es doble de la distancia del punto *P* al lado *DC*.

PROBLEMA 2

Cada una de las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, y *J* representan dígitos diferentes, de manera que *AB*, *CD*, *EF*, *GH* y *IJ* son números de dos cifras. Determinar el máximo valor numérico posible de la fracción:

$$\frac{AB + CD + EF}{GH - IJ}$$

PROBLEMA 3

Cinco niñas cuyas iniciales son *A*, *M*, *K*, *D* y *H*, descubrieron que, pesándose en una báscula de dos en dos e intercambiándose una cada vez, podían conocer el peso de todas ellas gastando una sola moneda (por ejemplo, primero se pesan juntas *A* y *D*, luego se baja *A* y se sube *K* y así se pesan juntas *D* y *K*, a continuación se baja una de ellas y se sube otra, sin que nunca se repita la misma pareja). Una vez pesadas todas las parejas, sus pesos en *kg* fueron: 129, 116, 125, 114, 124, 121, 123, 118, 120, 122. Calcular los posibles valores de los pesos individuales de las niñas.

PROBLEMA 4

Carlos quiere declarar su amor este día de los enamorados a Carmen, pero está indeciso, así que deja su suerte en manos de la matemática. Para ello escribe en una pizarra los números naturales desde 1 hasta 2016. A continuación escoge dos de esos números, los borra y en su lugar escribe la diferencia del mayor menos el menor. Continúa de esta manera hasta que queda un solo número en la pizarra. Si el último número es par Carlos declarará su amor, de lo contrario no lo hará. ¿Declarará su amor a Carmen?

PROBLEMA 5

En el planeta R22 hay sólo dos tipos de billetes. Se puede hacer cualquier compra con precio entero y solo hay quince precios enteros que no se pueden pagar sin necesidad de vuelto. En esos casos, se paga de más y se da el vuelto. Si 18 es uno de los precios que requiere vuelto, determinar el valor de cada tipo de billete.

NOVENO GRADO

PROBLEMA 1

Rodrigo escribe la siguiente lista de números en una pizarra:

1, 10111, 10111011111, 1011101111101111111, …

A continuación, él comienza a tachar de izquierda a derecha, todos aquellos números de la lista que son múltiplos de 3. ¿Cuántos unos tiene el centésimo número tachado?

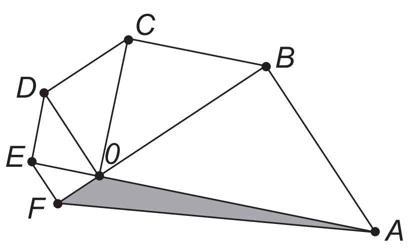
PROBLEMA 2

Considere el siguiente arreglo infinito de números:

Se marcan cuadrados de lado 1, 2, 3,…, tal y como se muestra en la figura.

Determinar la suma de los números dentro del cuadrado de lado 2016.

1	2	3	4	5	…
2	4	6	8	10	…
3	6	9	12	15	…
4	8	12	16	20	…
5	10	15	20	25	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	



PROBLEMA 3

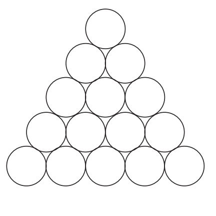
En la figura, los triángulos *ABO*, *BCO*, *CDO*, *DEO* y *EFO* son rectángulos isósceles. Si *OA* mide 8 *cm*, determinar el área de *AOF* en cm^2.

PROBLEMA 4

Un monstruo come galletas, adora devorar galletas sin parar, pero también es muy previsor: prefiere hornear muchas y guardar las que pueda para que no se le acaben. Empezando con una galleta el primer día, él realiza a diario una de las siguientes acciones:

- Hornear tantas galletas como tenía el día anterior.
- Ceder a la tentación y comer una galleta.

Demostrar que el monstruo puede acumular 2016 galletas en exactamente 12 días, y que la manera de obtener dicha cantidad de galletas es única.



PROBLEMA 5

Se tienen 15 fichas circulares, todas del mismo radio, colocadas en un arreglo triangular como se muestra en la figura. Cada una de las fichas se pinta de un solo color: rojo o azul. Demostrar que, sin importar cómo se pinten las fichas, siempre existen tres de ellas del mismo color cuyos centros son los vértices de un triángulo equilátero.

PRIMER AÑO

PROBLEMA 1

Los lados de un triángulo *ABC* miden $AB = 26cm$, $BC = 17cm$ y $CA = 19cm$. Las bisectrices de los ángulos de vértices *B* y *C* se cortan en el punto *I*. Por *I* se traza una paralela a *BC* que corta a los lados *AB* y *BC* en los puntos *M* y *N* respectivamente. Calcular el perímetro del triángulo *AMN*.

PROBLEMA 2

Sea *n* un entero positivo. Determinar el valor exacto de la siguiente suma.

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

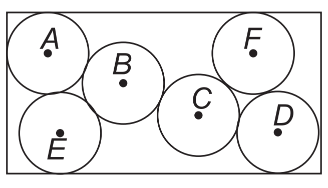
PROBLEMA 3

Calcular el producto de todos los enteros positivos que sean menores que 150 y que tengan exactamente 4 divisores positivos. Expresar su respuesta como producto de factores primos.

PROBLEMA 4

Se tiene un tablero de *n* x *n*, donde *n* es un entero positivo y se escriben en cada una de sus filas los números del 1 al *n* en algún orden, de modo que el arreglo obtenido sea simétrico respecto a la diagonal. Se desea que la diagonal del tablero no contenga todos los números del 1 al *n*. Demostrar que esto siempre es posible cuando *n* es par y que es imposible cuando *n* es impar.

PROBLEMA 5



Se tienen seis círculos de radio $\frac{1}{2}$, de manera que son tangentes entre sí y con los lados del rectángulo, como muestra la figura. Además los centros *A, B, C* y *D* están alineados.

Determinar las medidas de los lados del rectángulo.