XXIV Olimpiada Nacional de Matemática

Grados participantes: desde 3º hasta 9º grado.

Primera Fase: del 29 de octubre al 8 de noviembre de 2023.

Segunda Fase: 3 de febrero de 2024.

Contacto: onm@jovenestalento.edu.sv

Organizan:

PRIMERA FASE:

La prueba será administrada para estudiantes que cursen desde tercer grado hasta noveno grado. El estudiante deberá trabajar la prueba que corresponde al grado que cursa actualmente. En ningún caso se tomarán en cuenta soluciones a problemas propuestos para un grado anterior al grado que cursa el estudiante.

La prueba está separada por niveles de acuerdo al siguiente detalle:

	Grado	**Nivel**
Grado que cursa en Octubre de 2023	Tercero	1
	Cuarto	2
	Quinto	3
	Sexto	4
	Séptimo	5
	Octavo	6
	Noveno	7

Indicaciones:

- Los estudiantes de segundo grado pueden realizar la prueba del Nivel 1.
- La participación de todo estudiante será admitida únicamente si el desarrollo de la prueba es producto solo de su propio esfuerzo. Sin embargo, puede hacer uso de toda la bibliografía impresa y electrónica que disponga.
- Cada problema desarrollado deberá ser entregado en hojas separadas y numeradas. Además, cada página deberá contener el nombre y apellido completo del estudiante.
- Para la solución de los problemas de esta prueba, lo fundamental será la argumentación utilizada para lograrla. Así que aquellas participaciones en las que solo aparezcan las respuestas **no serán tomadas en cuenta**. Para los problemas de geometría, no serán válidas las soluciones obtenidas como resultado de medir directamente las figuras.
- Se evaluarán soluciones parciales a los problemas.
- Para la participación en la Olimpiada no es necesario enviar la solución de los cinco problemas del nivel correspondiente.
- Las soluciones a cada uno de los problemas deberán estar redactadas con la mayor claridad, ordenadas y sin tachaduras.
- Las soluciones deberán ser redactadas con bolígrafo. **No se aceptarán soluciones a lápiz**. En ningún caso se aceptarán fotocopias de soluciones. Serán anuladas todas las participaciones de quienes envíen soluciones idénticas.

PARTICIPACIÓN:

El procedimiento de participación en la vigésimo cuarta Olimpiada Nacional de Matemática está descrito en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/matematica/` .

REGISTRO:

Para participar es necesario registrarse en el sitio web `http://www.jovenestalento.edu.sv/registro`. Los participantes deberán ingresar los siguientes datos: nombres y apellidos completos, fecha de nacimiento, grado que estudia, lugar de vivienda, departamento, municipio, sector de vivienda, dirección, Número de Identificación Estudiantil (NIE), nombre de la persona responsable, teléfono y correo electrónico. Además, deberán presentar los siguientes datos del centro educativo al que pertenecen: código y/o nombre.

ACERCA DE LA SEGUNDA FASE:

Las participaciones de la primera fase que alcancen el puntaje requerido para clasificar en cada grado deberán realizar una prueba presencial el **sábado 3 de febrero de 2024**. La prueba se administrará en las sedes del Programa Jóvenes Talento.
Los concursantes convocados podrán consultar los listados oficiales publicados en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el **jueves 25 de enero de 2024**. Dichos listados incluirán información acerca del lugar y horario en el que se realizará dicha prueba.

INGRESO AL PROGRAMA JÓVENES TALENTO:

Las mejores participaciones de la segunda fase serán incorporadas al Programa Jóvenes Talento que el Ministerio de Educación organiza en cooperación con la Universidad de El Salvador. El PJT tiene diferentes componentes cuyos objetivos son descubrir y desarrollar el Talento en Matemática y Ciencias Naturales en los niveles básicos e inculcar en sus participantes la disciplina y el deseo de alcanzar altos niveles de excelencia académica, así como desarrollar en ellos capacidades de liderazgo y compromiso cívico. Dos de sus principales componentes son la **Academia Sabatina** y el curso **Futuros Dirigentes Técnicos Científicos de El Salvador**. La primera se desarrolla a lo largo del año escolar, durante 30 sábados en horario de 9:00 am a 4:00 pm; mientras que el segundo es un curso intensivo que se desarrolla al finalizar el año escolar.
La Academia Sabatina tiene la doble función de preparar en cursos básicos de Matemática y Ciencias Naturales al estudiante para que aproveche mejor el evento de fin de año y además, preparar a un grupo selecto para competir en olimpiadas internacionales de Astronomía, Biología, Física, Informática, Matemática y Química.
La nómina de estudiantes seleccionados para pertenecer al Programa Jóvenes Talento será publicada en `http://www.jovenestalento.edu.sv` el día **martes 19 de marzo de 2024** por la tarde. La Academia Sabatina se inaugurará el sábado **23 de marzo de 2024** con clases presenciales durante los turnos matutino y vespertino.

Nivel 1
(Tercer grado en Octubre de 2023)

Problema 1

La profesora Carolina entregó a Julio un triángulo de cartulina como el de la figura 1. Le asigna la tarea de encontrar todas las formas posibles de colocar este triángulo sobre la plantilla de la figura 2, de tal manera que todos los puntos azules coincidan con puntos verdes. Mostrar todas las formas que encontró Julio para resolver la tarea.

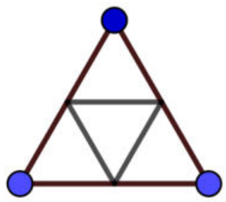


Figura 1

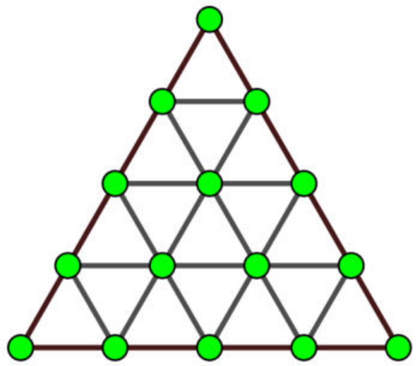


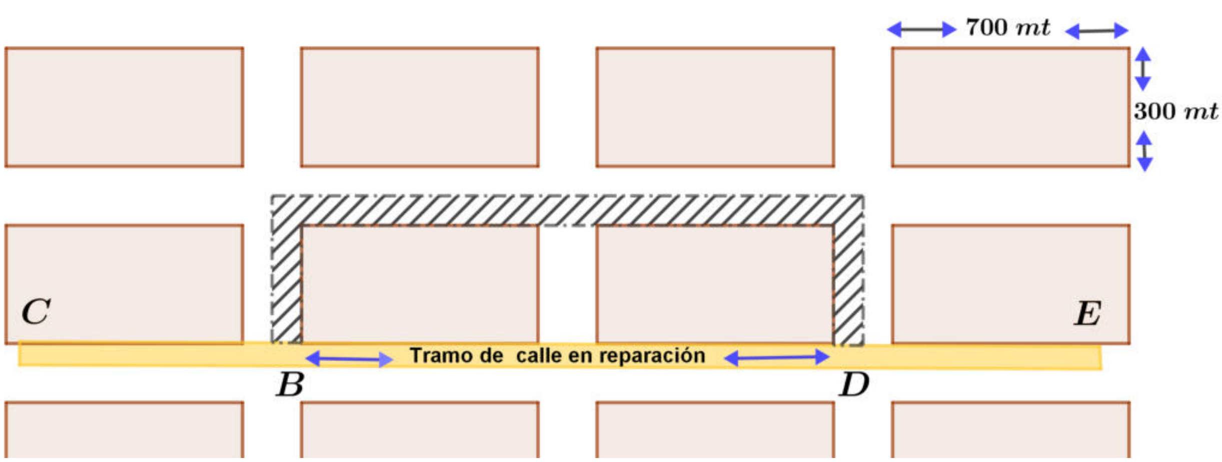
Figura 2

Problema 2

En la celebración del día del niño, la maestra de tercer grado compró 6 bolsas de 30 bombones de un solo sabor cada una. Después de la celebración, la maestra se lleva a casa los bombones sobrantes y encontró que de la bolsa de bombones de fresa sobraron 2, de la bolsa de bombones de menta sobraron 16 y sobraron 5 de la bolsa de bombones de chocolate. En cada una de las bolsas de bombones de uva, naranja y vainilla sobraron el doble de bombones que los sobrantes de fresa. ¿Cuántos bombones comieron los niños en total?

Problema 3

Luisito camina todos los días desde su casa que está en el punto C hasta el Centro Escolar ubicado en el punto E. Esta semana deberá desviarse desde el punto B al punto D porque un tramo de la calle está en reparación (es decir, no podrá tomar el camino recto). Si la reparación del tramo de la calle BD durará dos días, determinar cuántos metros más deberá caminar Luisito durante estos días.

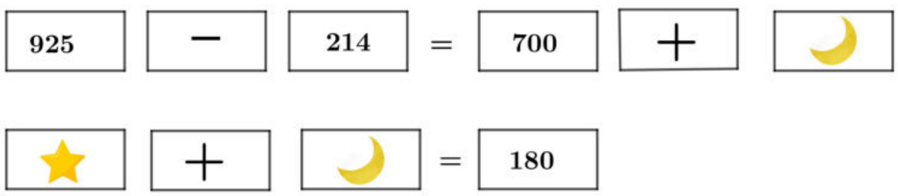


Problema 4

Los niños de tercer grado de la Escuela Gotitas y su maestra jugaban a formar acertijos con cartas que tenían dentro de una caja. En la caja estaban mezcladas diferentes tipos de cartas: con números, con símbolos (suma, resta, multiplicación y división), así como estrellas, soles y lunas.

- Raúl extrajo las cartas: 925, el símbolo de resta y 214.
- Sofía extrajo las cartas: 700, el símbolo de suma y luna.
- Matías extrajo las cartas: estrella, luna y el símbolo de suma.

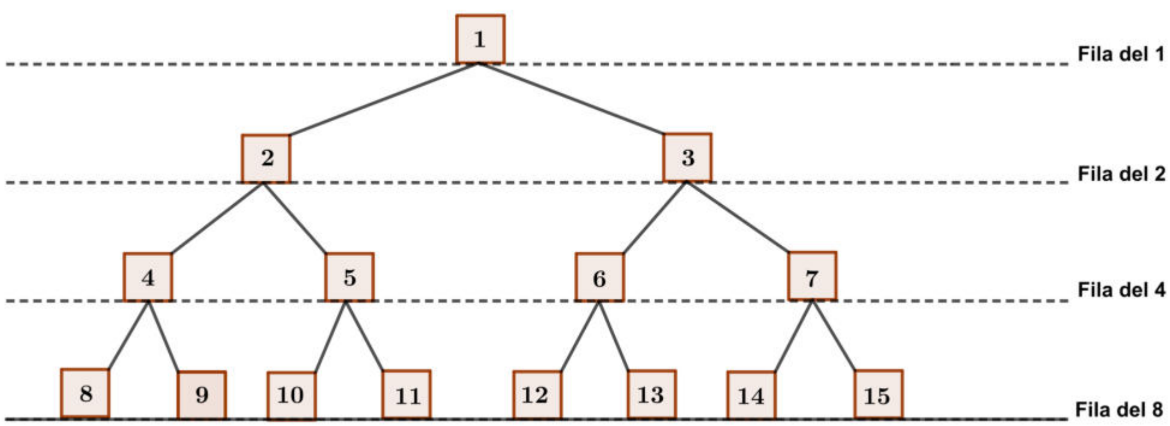
La maestra agregó la tarjeta con el número 180 y formó el siguiente acertijo.



Determinar el valor que tiene la estrella en el acertijo.

Problema 5

El diagrama de la imagen mostrada empieza con la tarjeta 1, abajo de ella se ubican dos tarjetas: la 2 y la 3. En la siguiente fila se colocan dos tarjetas debajo de cada una de las tarjetas de la fila anterior, es decir, debajo de la tarjeta 2, se ubican el 4 y 5; y debajo de la tarjeta 3, el 6 y el 7. Si continuamos agregando filas con la regla descrita, determinar en cuál fila de tarjetas estará el 2024.



Nivel 2
(Cuarto grado en Octubre de 2023)

Problema 1

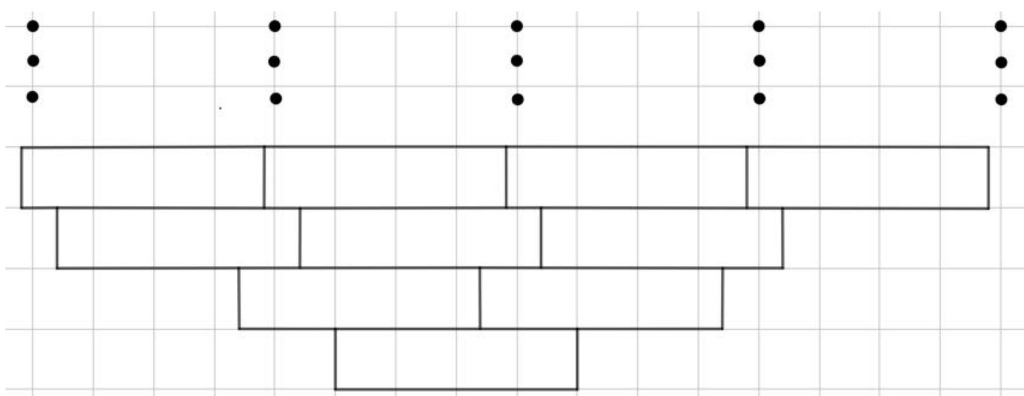
Memito tiene como tarea escribir los números desde el 1 hasta el 100. El niño tiene el problema de escribir equivocadamente el 6 en lugar del 9 y de la misma manera confunde el 9 con el 6. Por ejemplo, al intentar escribir el número “diecinueve”, el niño escribe en su cuaderno 16; mientras que al intentar escribir el número “treinta y seis”, el niño escribe 39. Por cada diez números correctamente escritos la maestra asigna un punto de la nota. Si Memito se confunde en el transcurso de toda la actividad, determinar la nota alcanzada por Memito en su tarea.

Problema 2

A la pupusería “La Gigante” asistieron los tres amigos: Astrid, Beto y Carolina. En este lugar únicamente se preparan pupusas gigantes de tres especialidades: revueltas, de queso y de chicharrón. Astrid se comió una pupusa revuelta y una de queso, por lo que pagó 5 dólares; Beto se comió una pupusa de queso y una de chicharrón, por lo que pagó 7 dólares; y Carolina se comió una pupusa revuelta y una de chicharrón, por lo que pagó 6 dólares. ¿Cuántos dólares se deben pagar al comprar una pupusa revuelta, una pupusa de queso y una pupusa de chicharrón?

Problema 3

Se desea construir una torre de 2024 niveles pegando piezas rectangulares de cartón, unas encima de otras, siguiendo el orden que se muestra en la figura. Si cada pieza tiene 4 cm de base y 1 cm de altura, encontrar el perímetro de la torre al quedar terminada.



Problema 4

Roxy juega a comunicarse con su amiga Xochitl mediante mensajes secretos usando únicamente las letras X y O. Roxy aún no se acostumbra a este tipo de juego y para transmitir un mensaje falla en cuatro intentos y acierta en su quinto intento. En el primer intento se equivocó en cuatro letras, en el segundo intento se equivocó en tres letras, en el tercer intento se equivocó en dos letras, en el cuarto intento se equivocó en una letra y finalmente, al quinto intento envió correctamente el mensaje.

A continuación se muestran los cinco intentos del mensaje que Roxy envió a Xochitl, aunque no están en orden.

- $XXXXO$
- $XOOXX$
- $OXXOX$
- $XXOXX$
- $OXXOO$

Con la información proporcionada, justificar si es posible o no encontrar el mensaje correcto que envió Roxy a Xochitl.

Problema 5

O, N y M son dígitos del 1 al 9 diferentes entre sí. Determinar los valores de O, N y M para que la suma sea realizada correctamente.

$$\begin{array}{cccc} & O & N & M \\ + & O & N & M \\ + & O & N & M \\ \hline = & N & N & N \end{array}$$

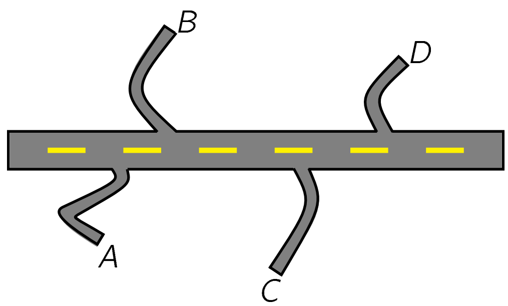
Nivel 3
(Quinto grado en Octubre de 2023)

Problema 1

Bryan escogió algunos números del conjunto $\{2, 3, 7, 9, 24, 28\}$ y Kevin se quedó con los números que sobraron. Se sabe que el producto de los números de Bryan es igual al producto de los números de Kevin y además, Bryan no escogió el número 7. Calcular la suma de los números de Kevin.

Problema 2

Cerca de una carretera hay cuatro fincas A, B, C y D, donde cada una de ellas está unida a la carretera por medio de un camino.



Utilizando exclusivamente los caminos y la carretera, se sabe que:

- Para ir de A a B se recorren 1.5 km.
- Para ir de A a C se recorren 2 km.
- Para ir de B a C se recorren 1.5 km.
- Para ir de B a D se recorren 1.7 km.

Sin ir por otros caminos y sin hacer retornos, calcular cuántos kilómetros se recorren de A a D.

Problema 3

Un profesor escribe un número de cuatro dígitos en la pizarra. Ana olvidó escribir el primer dígito del número (el de la izquierda) y Boris olvidó escribir el último dígito (el de la derecha), es decir, Ana y Boris escribieron un número de tres dígitos cada uno. Si la suma de los números del profesor, de Ana y de Boris es 2024, determinar el número que escribió el profesor.

Problema 4

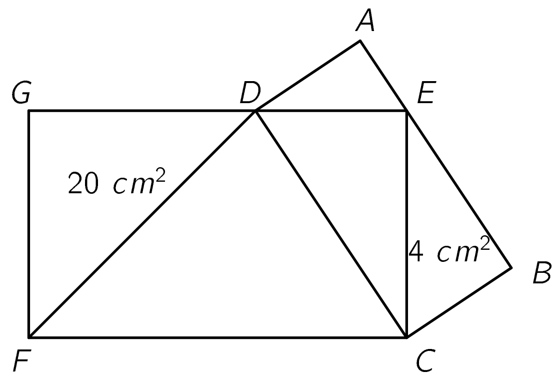
Se define una sucesión de la siguiente manera: el primer término es 8 y para obtener cada uno de los siguientes términos se suma 2 o se multiplica por 2, de forma alternada. Así que los primeros términos de la sucesión son:

$$8,\ 10,\ 20,\ 22,\ 44, \cdots$$

Determinar la cifra de las unidades del término que está en la posición 2024.

Problema 5

Los rectángulos $ABCD$ y $FGEC$ se dibujan como se muestran en la figura. Se sabe que el área del triángulo CEB es 4 cm^2 y el área del triángulo FGD es 20 cm^2. Calcular la diferencia de las áreas de los triángulos FDC y DAE.

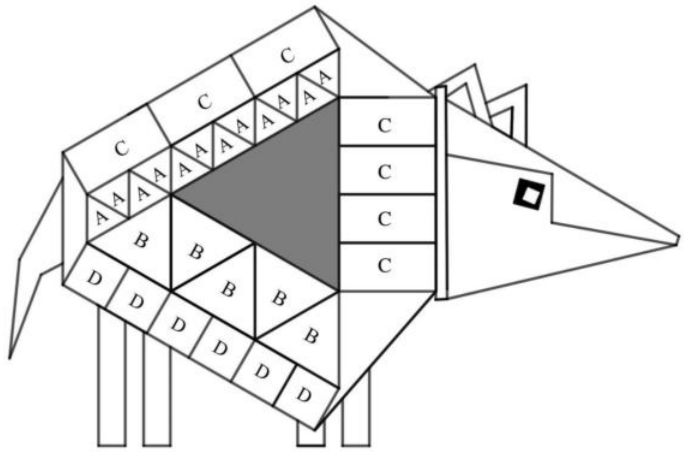


Nivel 4
(Sexto grado en Octubre de 2023)

Problema 1

A Maryorie y Levi les gustan mucho las figuras geométricas. Utilizando distintos tipos de figuras geométricas dibujan un armadillo. Se tiene la siguiente información:

- A y B son triángulos equiláteros.
- C es un rectángulo de área 2 cm^2.
- D es un cuadrado con perímetro 4 cm.
- B y C tienen el mismo perímetro.



Determinar el valor de los lados del triángulo sombreado.

Problema 2

A Paxcelly le gustan mucho los girasoles. Ella comenzó a plantar girasoles en su jardín el día lunes y desde entonces cada semana planta siete girasoles los días lunes y cuatro los días martes. Cada miércoles la plaga *Quíntica* llega a su jardín y acaba con cinco de los girasoles plantados hasta ese día. Por ejemplo, si antes de la llegada de la plaga hay once girasoles, cuando esta llegue, dejará el jardín con seis girasoles. Si cierto día la cantidad de girasoles en el jardín de Paxcelly fue 611, determinar en qué día de la semana sucedió esto.

Problema 3

Adolfo, Bessy y Cristóbal fueron a cenar a la pupusería de doña Ena. Al final de la cena pidieron sus cuentas por separado, pero doña Ena solo recordaba la cantidad de pupusas que habían pedido entre todos y ellos recordaban los siguientes datos sobre sus pedidos:

Adolfo: "Cada uno pidió una cantidad prima de pupusas de queso y una cantidad prima de pupusas revueltas. Bessy comió la misma cantidad de pupusas revueltas que Cristóbal de queso".

Bessy: "Cada uno pidió más pupusas revueltas que pupusas de queso, además, Cristóbal comió 10 pupusas en total".

Cristóbal: "Adolfo y Bessy comieron la misma cantidad de pupusas de queso y la cantidad de pupusas revueltas que comió Adolfo es igual a la cantidad total de pupusas que comió Bessy".

Si Cristóbal fue quien comió más pupusas, determinar la cantidad de pupusas revueltas y la cantidad de pupusas de queso que pidió cada uno.

Problema 4

Valeria y Lucelly construyeron una casa para aves en su jardín, en ella viven cuatro torogoces y cuatro chiltotas. Ellas llamaron a los torogoces: Ta, Te, Ti y To, y a las chiltotas: Ca, Ce, Co y Cu. Por las mañanas las aves siempre muestran los siguientes comportamientos peculiares al salir de su casa:

- Cada mañana salen solamente dos chiltotas y tres torogoces de la casa.
- Las chiltotas salen justo después de algún torogoz.
- Te y Cu son mejores amigos y siempre sale uno inmediatamente después del otro, en cualquier orden.

Determinar de cuántas maneras pueden salir las aves de su casa.

Problema 5

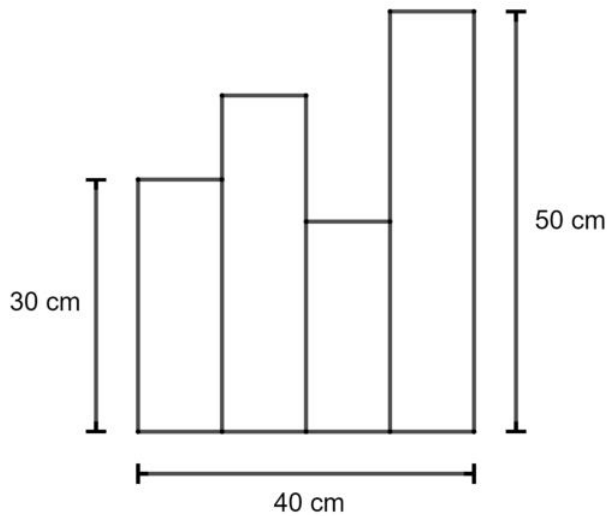
Jeacqui suma los números $\overline{ab5d}$ y $\overline{e5g}$ en la calculadora y obtiene un número de cuatro dígitos. Edwin anota en su cuaderno el resultado obtenido por Jeacqui, sin embargo, accidentalmente, le añadió un dígito en algún lugar; luego de esto el número anotado en el cuaderno de Edwin es 24608. Se sabe que los dígitos de $\overline{ab5d}$ están ordenados de menor a mayor, los de $\overline{e5g}$ de mayor a menor y la suma de los dígitos de cada uno de los números es 16. Determinar qué dígito añadió Edwin.

Nota: $\overline{ab5d}$ es un número de cuatro dígitos con el dígito de las decenas igual a cinco y $\overline{e5g}$ es un número de tres dígitos con el dígito de las decenas igual a cinco.

Nivel 5
(Séptimo grado en Octubre de 2023)

Problema 1

Se construye una cerca con cuatro tablas del mismo ancho, pero diferentes alturas. Se conocen los valores de las alturas de la primera y la última tabla, así como el ancho total de la cerca, como se muestra en la figura. Calcular la altura de la tabla más corta, considerando que el área total de la cerca es 1450 cm^2 y su perímetro es 210 cm.



Problema 2

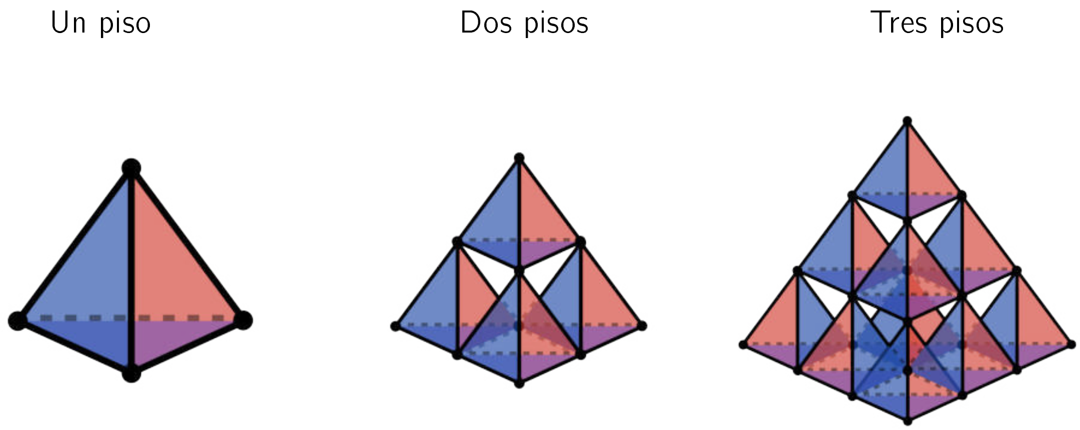
Tres amigos se enfrentan en duelos de tenis de mesa, uno contra uno. Cada vez que alguien pierde, descansa, mientras que los otros dos juegan el siguiente partido. Se sabe que Alberto jugó 9 partidos, Bernardo jugó 11 partidos y Carlos jugó 6 partidos. Determinar quién perdió el sexto partido.

Problema 3

La edad de un padre es un número de dos cifras, mientras que la edad de su hijo es de una cifra. Al concatenar las edades del padre y el hijo, en ese orden, se genera un cuadrado perfecto de tres cifras. Por ejemplo, si el padre tiene 41 y el hijo 5, el número concatenado sería 415. Luego de tres años, cuando se concatenan nuevamente las cifras de las edades, se vuelve a formar un cuadrado perfecto de tres cifras. ¿Cuáles son las edades iniciales del padre y el hijo?

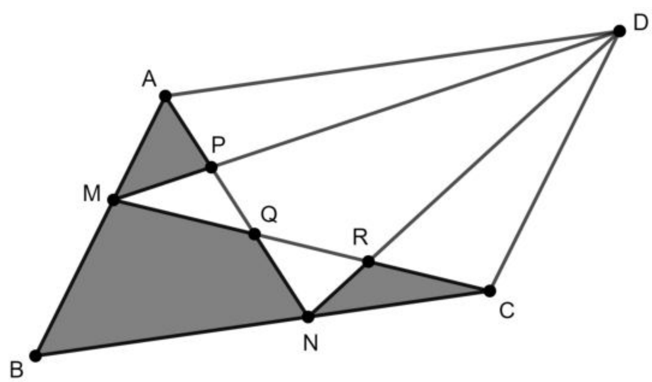
Problema 4

Se desea construir una pirámide con tetraedros. Para colocar un tetraedro un nivel arriba, se requiere que tenga como base a otros tres tetraedros, como se observa en las figuras. Determinar cuántos tetraedros serán necesarios para completar una pirámide de 24 pisos.



Problema 5

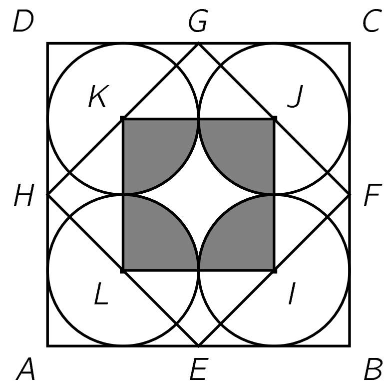
En el paralelogramo $ABCD$, se coloca un punto M sobre el lado $\overline{AB}$ y otro punto N sobre $\overline{BC}$. Se trazan los segmentos $\overline{AN}$, $\overline{DN}$, $\overline{DM}$ y $\overline{CM}$, como se observa en la figura. Calcular el valor del área sombreada sabiendo que el área del cuadrilátero $DPQR$ es 24 cm^2.



Nivel 6
(Octavo grado en Octubre de 2023)

Problema 1

Sean $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$ cuadrados tales que E, F, G y H son los puntos medios de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente; mientras que I, J, K y L son los puntos medios de $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{GH}$ y $\overline{HE}$, respectivamente. Se trazan 4 circunferencias iguales de centros I, J, K y L tales que son tangentes en los puntos medios de los lados del cuadrado $IJKL$. Encontrar el área del cuadrado $ABCD$ si el área sombreada es igual a 2π.



Problema 2

Los organizadores de un torneo de ajedrez quieren saber exactamente cuántos niños, adultos y ancianos están participando. Se preguntó a dos jueces, pero no recordaban las cantidades, así que comentaron lo siguiente:

- Juez 1: "En cualquier grupo de 10 personas hay al menos dos ancianos y tres adultos".
- Juez 2: "La cantidad de adultos es tres veces la cantidad de niños".

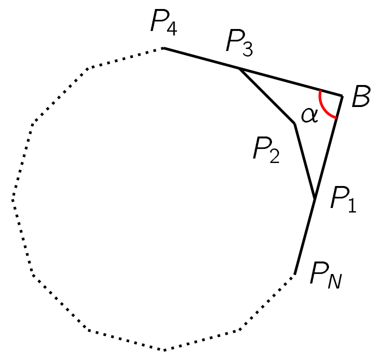
Determinar la cantidad de niños, adultos y ancianos en el torneo.

Problema 3

Cada número entero positivo (1, 2, 3, ...) se pinta de rojo, azul o verde, utilizando cada color para pintar al menos un número. Comprobar si es posible encontrar una coloración donde al sumar dos números de distinto color siempre se obtenga un número pintado del tercer color.

Problema 4

Se construye un polígono regular de $N \geq 6$ lados y se numeran los vértices en sentido antihorario como P_1, P_2, ..., P_N. Se extienden los segmentos $\overline{P_4P_3}$ y $\overline{P_NP_1}$, como se muestra en la figura, los cuales se intersecan en B. Encontrar el valor de N si $\alpha = 120°$.



Nota: la figura es solo una representación, no necesariamente es un polígono de 12 lados.

Problema 5

Se define S_n como la suma de los dígitos de un número entero positivo n. Encontrar el menor n tal que S_n y S_{n+1} sean múltiplos de 13.

Nivel 7
(Noveno grado en Octubre de 2023)

Problema 1

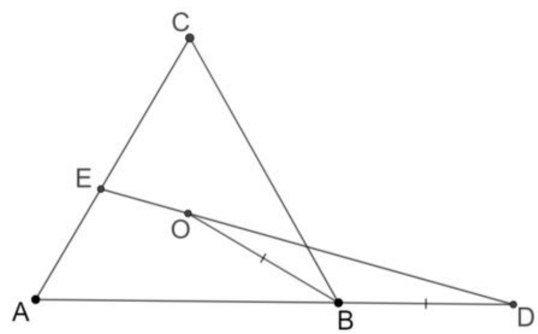
Una hormiga se desplaza mediante el siguiente procedimiento: cada día, suma el número del día de la semana más el número de la semana actual y avanza esa cantidad de centímetros. Suponiendo que la hormiga comienza a desplazarse el día 1 de la semana 1, calcular cuántos centímetros habrá recorrido la hormiga al final de 500 días.
Nota: tomando en cuenta que cada semana tiene 7 *días, se asume que luego del día* 7 *de la semana* n *continúa el día* 1 *de la semana* $n+1$. *Además, dicho* n *no se reinicia con el paso de un mes o un año.*

Problema 2

Se escogen algunos números distintos de entre los primeros 20 enteros positivos y se escriben en una lista de forma que en cualquier pareja de números adyacentes, uno es múltiplo del otro; es decir, si a está a la par de b, entonces a es múltiplo de b o b es múltiplo de a. Encontrar la máxima cantidad de elementos que puede tener una lista que cumpla esta condición.

Problema 3

Sea ABC un triángulo equilátero de centro O. Sea D un punto en la prolongación del segmento $\overline{AB}$ tal que $BD = BO$. Sea E la intersección de la recta $\overline{DO}$ con el lado $\overline{AC}$. Si $AB = 2$, hallar la longitud AE.



Problema 4

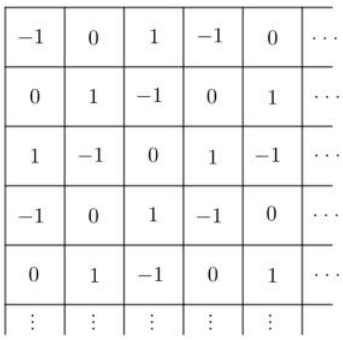
Nelson adquirió una máquina de monedas que funciona bajo cuatro estrictas reglas:

- La máquina siempre regresa más monedas que las que se le ingresan.
- Siempre que se ingresen i monedas, la máquina regresará una cantidad constante de a_i monedas.
- Si $i > j$, entonces $a_i > a_j$.
- Si se ingresan a_i monedas, la máquina regresará $3i$ monedas.

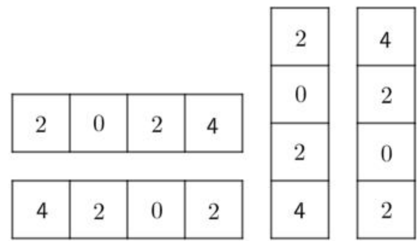
¿Cuántas monedas obtendrá Nelson si ingresa 20 monedas?

Problema 5

Balto tiene un tablero de 24×24 en cuyas casillas están escritos algunos números de acuerdo al siguiente patrón: en la primera fila está escrito el patrón $-1, 0, 1, -1, 0, 1, \ldots$, mientras que las siguientes filas contienen el patrón de la fila inmediata superior desplazado una casilla a la izquierda, tal y como se muestra en la figura:



Tablero 24×24



Fichas

Balto quiere cubrir todo el tablero utilizando fichas de 1×4, de manera que no hayan fichas sobrelapadas y ninguna ficha se salga de los bordes del tablero. Las fichas tienen números escritos en sus casillas y pueden ser de 4 tipos, tal y como muestra la figura. Una vez cubierto todo el tablero, cada casilla tiene dos números sobrelapados (el del tablero y el de la ficha). Balto multiplica estos dos números para cada casilla y al final suma los 24^2 resultados. Encontrar el máximo valor posible que puede obtener Balto al calcular esta suma.