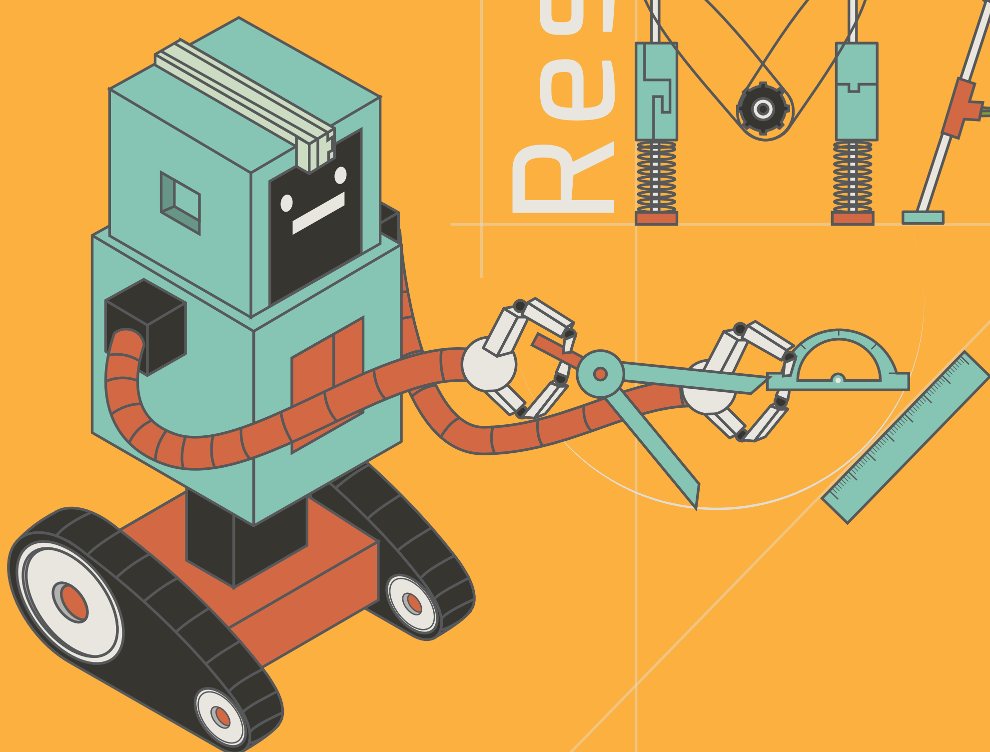
Viceministerio
de Ciencia y
Tecnología

Primero
y
Segundo
ciclo

Resolución de PROBLEMAS



Ministerio de Educación

Viceministerio de Ciencia y Tecnología

Programa Cerrando la Brecha del Conocimiento

Subprograma Hacia la CYMA

Resolución de problemas matemáticos para Primero y Segundo Ciclo de Educación Básica

Plan Social Educativo
Vamos a la escuela

Ministerio de Educación

Franzi Hasbún Barake

Ministro de Educación Ad-honorem

Erlinda Hándal Vega

Viceministra de Ciencia y Tecnología

William Ernesto Mejía

Director Nacional de Ciencia y Tecnología

Xiomara Guadalupe Rodríguez Amaya

Gerente de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación

Oscar de Jesús Águila Chávez

Jefe de Educación Media en CTI

Oscar de Jesús Águila, Reina Maritza Pleitez, Norma Yolibeth López, José Carlos Márquez Hernández.

Dirección del Esfuerzo Editorial.

Oscar de Jesús Águila Chávez, José Carlos Márquez Hernández, Roberto Arqueta Quan, Félix Abraham Guevara, Reina Maritza Pleitez, Norma Yolibeth López de Bermúdez.

Equipo de Redacción, Dibujo, Edición, Diagramación y Edición.

Reina Maritza Pleitez Vásquez, Norma Yolibeth López de Bermúdez, José Carlos Márquez Hernández, Marta Yesenia Calderón de Lima, Jorge Alberto González Villalobos, Rocio Elizabeth Henríquez Henríquez, Marta Yaneth Lemus Landaverde, Judith Martínez Herrera, Gilma Jeannette Mendoza Hernández, José Gonzalo Nieto Alvarado, Yolanda Carolina Santana Osegueda, Silvia Violeta Salgado Romero, Ana Celina Valladares Morales, Jorge Alberto Vásquez Gómez.

Autores

Nadia Jacqueline Andrade, Lilian Margarita Arévalo Medrano, Leonila Marleny Bonilla de Molina, María del Carmen Carrillo Beltrán, Ana Margarita Castro Flores, Sandra Marleny Cruz de Ayala, Juana Silvia Hernández Ramírez, Jennifer Stefany Hernández Rivas, Ana Angélica Lemus de Delgado.

Colaboradores

Sergio Armando Márquez Hernández.

Diseño de Portada y Contraportada

Primera edición

Edificios A4, segundo nivel, Plan Maestro, Centro de Gobierno, Alameda Juan Pablo II y calle Guadalupe, San Salvador, El Salvador, América Central. Teléfonos: + (503) 2510-4217, + (503) 2510-4218, + (503) 2510-4219, Correo electrónico: gecti@mined.gob.sv.

Índice

Presentación

El presente texto sobre resolución de problemas matemáticos para docentes, tiene como propósito fortalecer el desarrollo curricular de Matemática en Pimer Ciclo y Segundo Ciclo de Educación Básica. En su elaboración se destaca la participación de integrantes de la Red de Docentes para la Resolución de Problemas Matemáticos (RESPROMAT), quienes han enriquecido el proceso con sus sugerencias y propuestas.

El Viceministerio de Ciencia y Tecnología a través de la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación (GECTI) y el subprograma "Hacia la CYMA" que se está desarrollando durante el quinquenio 2009-2014, ejecuta el Proyecto de Enriquecimiento Curricular en Ciencias Naturales y Matemática, el cual tiene entre sus acciones la elaboración y entrega de material de enriquecimiento curricular a docentes de Primer Ciclo y Segundo Ciclo de Educación Básica.

La socialización de la estrategia de participación de docentes en este proceso de creación de materiales, tiene la posibilidad de ser una plataforma de construcción de conocimientos bajo el enfoque de resolución de problemas, metodología mediante la cual se fortalecen las competencias matemáticas necesarias, que debe tener cada docente para alcanzar el desarrollo de capacidades básicas valiosas para el proceso de enseñanza- aprendizaje, como son: saber argumentar, cuantificar, analizar críticamente la información, representar y comunicar, resolver y enfrentarse a problemas, usar técnicas e instrumentos matemáticos y modelizar e integrar los conocimientos adquiridos.

La resolución de problemas es clave para el avance de la internalización de estrategias idóneas para una formación de calidad en Matemática, porque integra estrategias, algoritmos y procesos de pensamiento. Con este propósito se ha elaborado este texto que contiene 55 problemas para fortalecer las capacidades de investigación, innovación y creación de docentes de Primer Ciclo y Segundo Ciclo de Educación Básica. El material está diseñado para ser utilizado como componente de enriquecimiento, introducción o cierre de un tema, valorando en cada caso el momento oportuno para la generación de estrategias claves para el desarrollo de pensamiento lógico.

Introducción

Desde asegurar la subsistencia cotidiana hasta abordar los más complejos desafíos derivados de la ciencia y la tecnología, sin excepción todas las personas resolvemos problemas. Lo importante de la actividad de resolución de problemas es evidente; en definitiva, todo el progreso científico y tecnológico[1], el bienestar y hasta la supervivencia de la especie humana dependen de esta habilidad. No debemos extrañarnos de que la misma se haya convertido en un nuevo objeto de estudio, atrayendo por igual la atención de profesionales en psicología, ingeniería, física, química, etc.

En cuanto a la enseñanza de la Matemática debemos hacer algunos cuestionamientos que son fundamentales en el proceso metodológico de la resolución de problemas. ¿Cuál es la diferencia entre ejercicio y problema en Matemática? ¿Cuándo está un estudiante resolviendo un ejercicio y cuándo un problema? ¿Cuál es el papel de cada docente en la enseñanza de la resolución de problemas?

Al analizar un ejercicio se puede deducir si se puede resolver o no. Comúnmente se aplica un algoritmo elemental o complejo que el estudiantado puede conocer o ignorar, pero una vez encontrado el algoritmo, se aplica y se obtiene la solución.

Justamente, la exagerada proliferación de ejercicios en la clase de Matemática ha desarrollado y penetrado en el estudiantado como un síndrome generalizado. En cuanto se le plantea una tarea a realizar, tras una simple reflexión, trata de obtener una solución muchas veces elemental, sin la apelación a conocimientos diversos.

En un problema no es siempre evidente el camino a seguir. Incluso puede haber muchos. Hay que apelar a conocimientos, no siempre de Matemática, relacionar saberes procedentes de campos diferentes, poner a punto nuevas relaciones. El papel de cada docente es proporcionar a sus estudiantes la posibilidad de desarrollar hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente donde quepan unos cuantos algoritmos, teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente acumulados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a académicos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas resultan motivaciones, actitudes, hábitos, ideas y competencias para el desarrollo

---

[1] Nieto Said, José Heber (2004). *Resolución de Problemas Matemáticos*, Venezuela.

de herramientas, en una palabra, la vida propia de la Matemática[2]. Obviamente la resolución de problemas tiene una clásica y bien conocida fase de formulación elaborada en la década de los años cuarenta del siglo veinte, por el matemático húngaro George Polya[3].

La aludida fase consiste en comprender el problema, trazar un plan para resolverlo, poner en práctica el plan y comprobar el resultado. Por supuesto, no sólo basta conocer las fases y técnicas de resolución de problemas. Se pueden conocer muchos métodos, pero no siempre cuál aplicar en un caso concreto.

Justamente, hay que enseñar también al estudiantado a utilizar las estrategias conocidas, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo. Es ahí donde se sitúa la diferencia entre quienes resuelven problemas y el resto, entendiendo que este nivel es la capacidad que tienen de autorregular su propio aprendizaje, es decir, de planificar qué estrategias se han de utilizar en cada situación, aplicarlas, controlar el proceso, evaluarlo para detectar posibles fallos, y como consecuencia transferir todo ello a una nueva actuación[4].

Hay que tener presente que resulta difícil motivar. Sólo con proponer ejercicios no se puede conseguir que el estudiantado se capaz de investigar y descubrir nuevos conocimientos y relaciones entre las ciencias. Se recomienda establecer problemas en los que el grupo no sepa qué hacer en un primer intento, con esto conseguiremos atraer su atención, curiosidad y motivación, para que luego se implique en el proceso de resolución de problemas.

Otro aspecto no menos importante a tener en cuenta es la manipulación de materiales para resolver problemas. Hemos de ser capaces de que el estudiantado visualice el problema utilizando materiales concretos, que los manipule, pues la manipulación es un paso previo e imprescindible para la abstracción en las ciencias en general.

Finalmente hay que tener claro que: "Aprender a pensar matemáticamente –involucra más que tener una gran cantidad de conocimiento de la materia al dedillo. Incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente, y comprender y aceptar las reglas tácitas de juego", según Schoenfeld.

---

[2] De Guzmán Ozámiz, Miguel (1936 - 2004) matemático español.
[3] Pólya, George (1887-1985), matemático húngaro, *How to solve it*, Pricenton University Press.
[4] Schoenfeld, Allan (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Pres.

Estrategias para la resolución de problemas matemáticos

En este libro hacemos uso de diferentes estrategias para la resolución de problemas, que son útiles para entrar en procesos de reflexión matemática y pensamiento lógico. Simplificación y búsqueda de patrones

¿Qué es un patrón?

Se conoce como patrón a una sucesión de signos que se construyen siguiendo una regla, ya sea de repetición o de recurrencia[5].

Muchas veces al estar resolviendo un problema, sus condiciones evidencian la existencia de patrones o regularidades que permiten establecer posibilidades de solución muy originales y creativas.

Las ciencias casi en forma unánime se construyen sobre la búsqueda de patrones, por lo tanto debemos priorizar su descubrimiento en el proceso de formación de competencias matemáticas. En este documento se hace uso de estas estrategias para resolver varios problemas propuestos, y entre los patrones identificados a lo largo de la propuesta encontraremos:

1. Patrones en contexto geométrico
2. Patrones en contexto numérico
3. Patrones por repetición
4. Patrones por recurrencia

Es necesario que la lectora o lector tenga presente que los patrones son un tema de carácter transversal con respecto a todos los contenidos de la Matemática y de otras disciplinas. El proceso de "hacer" matemática es más que cálculo y deducción; involucra la observación de patrones, la prueba de conjeturas, la estimación de resultados (Schoenfeld, 1992)[6]. Los patrones se encuentran en las tablas de las operaciones aritméticas, los sistemas de

5 http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/diseno_desarrollo/matematica3.pdf, consultado 22/11/2013

6 http://hplengr.engr.wisc.edu/Math_Schoenfeld.pdf, consultado 22/11/2013

numeración y las sucesiones de números, entre estos últimos los números pares, impares, primos, compuestos y cuadrados.

Finalmente, hay que considerar que para resolver problemas eficientemente se necesita un rico y conectado entendimiento de la Matemática y la habilidad de ver patrones de similitud y asociación, así como destrezas para llevar a cabo un plan de solución y revisar que los resultados tengan sentido en el contexto del problema (Burkhardt & Bell, 2007, p. 395).

Ejemplo 1: El reparto del pastel

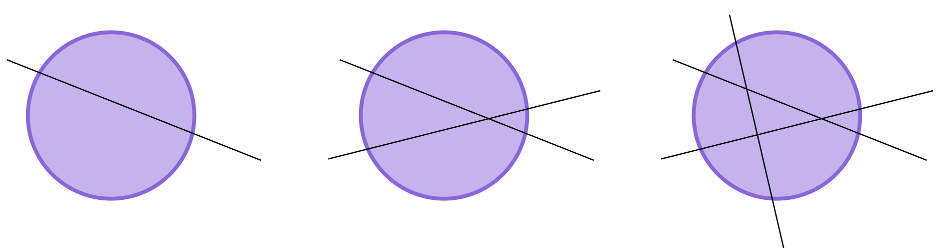
En una fiesta se desea repartir un pastel circular entre las personas asistentes. Para ello se realizan cortes mediante líneas rectas de un extremo a otro en el pastel. ¿En cuántos pedazos queda dividido el pastel, si se efectúan 5 cortes?

Cada corte deberá pasar por dos puntos del pastel (no es necesario que los cortes pasen por el centro). El segundo corte deberá intersectar al corte anterior y los puntos de intersección deberán estar en el interior del pastel. Un punto interior no debe ser intersección de tres o más rectas.Los cortes no pueden ser paralelos. Además, identificar qué características se observan en los primeros 3 cortes para deducir:

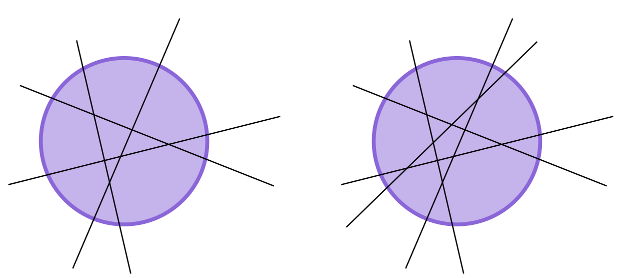
a) ¿En cuántos pedazos queda dividido el pastel si se efectúan 5 cortes?
b) ¿Y si se efectúan 7 cortes en el pastel?
c) ¿Cuál es la conjetura de los cortes en el pastel?

Solución

Una manera de solucionar el problema es encontrar la regla o patrón que dará el mayor número de regiones que pueden obtenerse con cualquier número de cortes.



1 corte → 2 regiones **2 cortes → 4 regiones** **3 cortes → 7 regiones**



4 cortes → 11 regiones **5 cortes → 16 regiones**

El pastel sin cortar es una sola región, de modo que cuando hacemos el primer corte se suma una región más.

Al hacer el segundo corte, notamos que se suman dos partes más obteniendo 4 regiones.

El tercer corte a traviesa las dos líneas anteriores, formando tres regiones. Cada una de esas regiones del pastel se divide en dos partes, de modo qué cada región agregará un pedazo extra haciendo un total de 7 pedazos.

Cortes	1	2	3	4	5	6	7
Pedazos de pastel	2	4	7	11	16	22	29

Lo mismo ocurre en el cuarto corte. Se traza de manera que pase por los otros tres cortes. Ahora el pastel, queda dividido en cuatro partes, agregando un pedazo extra por cada corte, queda divido en 11 regiones.

Esto nos lleva a encontrar el patrón de recurrencia, por ejemplo, el número de particiones del tercer corte es la suma de los cortes más el número de pedazos del corte anterior.

Llamaremos T_n el número de pedazos a encontrar y T_{n-1} el número de pedazos del corte anterior y n es el corte que estamos efectuando.

Es decir $T_n = T_{n-1} + n$

Así, por ejemplo:

$$T_7 = T_6 + 7 = 22 + 7 = 29$$

Si utilizáramos este método para cantidades de cortes más grandes, se nos haría difícil encontrar el resultado; por ejemplo, si nos dicen que el pastel tenga 250 cortes, tendríamos que realizar hasta el corte 249 para encontrar el resultado.

El modelo facilita este trabajo, lo veremos como conjetura. Es decir, que en este ejemplo el modelo puede ser $\frac{n(n+1)}{2} + 1$, donde n es el número de cortes, (n+1) es el siguiente corte, el producto de ellos se divide entre 2, y si le sumamos 1 obtendremos el número de particiones.

Esta conjetura se puede observar mediante la siguiente tabla que muestra las operaciones realizadas por los cortes para obtener el posible modelo:

Regiones anteriores	Regiones con el corte	Total de regiones
1	1	2
2	2	4
4	3	7
7	4	11
11	5	16

Observesé que las regiones con el corte son la suma de los números naturales y esta suma se representa por la fórmula $\frac{n(n+1)}{2}$, a la que se le suma el pastel completo que hace una región. Por ello nuestra conjetura queda: $\frac{n(n+1)}{2}+1$

Si comprobamos para $n = 7$ se tendrá:

$$\frac{7(7+1)}{2}+1=\frac{7\times 8}{2}+1=(7\times 4)+1=28+1=29$$

Ensayo-error

Esta estrategia consiste en experimentar con posibles soluciones hasta encontrar la correcta. Usualmente tiene el inconveniente de que es un proceso tedioso, pero efectivo. Se sigue los siguientes pasos lógicos:

• Considerar una posible solución.

• Probar si esta solución satisface las condiciones del problema.

• Modificar la solución escogida en función del resultado obtenido y repetir éste hasta obtener la solución correcta.

Ejemplo 2

Busca números primos de la forma AA, BAB, BACD y AAAC, teniendo en cuenta que las letras A, B, C y D representan el mismo dígito en los cuatro números.

Solución

El número de la forma AA es un número primo que tiene sus dígitos iguales. ¿Qué números tienen esta forma? ¿Cuántos son primos? Resulta que si tenemos el primer número AA=11 es primo, pero luego los números que tienen esta forma son: 22, 33, 44, 55, 66, etc, pero no son primos puesto, que son múltiplos de 11. Por tanto, $A = 1$.

Ahora veamos el número primo de la forma AAAC, donde la letra C no puede ser 1, 5 o par. ¿Por qué? el número AAAC tiene la forma 111C, y si es C es 1 no es número primo, ya que sería un múltiplo de 11. Si fuese 5 sería un múltiplo de 5 y si fuese par entonces seria múltiplo de 2. El número AAAC tiene que ser, en consecuencia, uno de estos: 1113, 1117 o 1119. ¿Cuál de ellos es primo? El número 1113 y 1119 son múltiplos de 3, por tanto C=7 y el número primo que representa AAAC es 1117.

Encontremos el valor del dígito B. ¿Sabría decir por qué el número primo de la forma BAB tiene que ser 313 o 919? Tenemos que B no podría ser 1, 5, 7 o par, puesto que si es 1 es múltiplo de 11; por tanto, no sería primo. Si fuese 5 sería múltiplo de 5, si fuese 7 sería múltiplo de 3 y si fuese par sería múltiplo de 2; por tanto, sólo puede ser 313 o 919.

Aparentemente las dos soluciones son válidas; por consiguiente, la letra B puede ser 3 o 9.

El dígito D del número BACD, por su parte, también puede ser sólo 3 o 9. Si D=1, entonces sería múltiplo de 3 e independientemente que sea el dígito B, es un 3 o un 9. El dígito D no puede ser 5, porque el número BACD sería múltiplo de 5; y tampoco puede ser un dígito par, ya que sería múltiplo de 2, y si fuese 7 también sería múltiplo de 3. Por tanto, D sólo puede ser 3 o 9.

Hemos encontrado que el dígito B y D pueden ser 3 ó 9. ¿Cuál de las dos posibilidades anteriores es la correcta? Analicemos el número BACD: si B=3 y D=9, el número BACD= 3179: si B=9 y D=3, el número BACD=3179. Este es un múltiplo de 11, por tanto, los dígitos para B y D son 9 y 3 respectivamente. La solución es: 11, 313, 9173.

Ejemplo 3

Se tienen calcetines de colores: 10 azules, 10 rojos y 20 negros, está oscuro y se desea sacar calcetines del cajón. ¿Cuál es la cantidad mínima de calcetines que se debe sacar del cajón para asegurar que se tendrán en la mano dos del mismo color?

Solución

Para llegar a la solución se procede por intentos.

Tomar 2 calcetines:

Se puede tener una pareja del mismo color: aa, rr, nn, pero también parejas con distinto color: an, rn, ar.

Tomar 3 calcetines:

Se puede tener tríos de calcetines con igual color: aaa, rrr, nnn.

Tríos con dos calcetines del mismo color y uno de distinto color: aan, nnr

Tríos con tres calcetines de distinto color: arn, nra

Tomar 4 calcetines:

Se puede tener cuartetos de calcetines con igual color: aaaa, nnnn, rrrr.

Cuartetos con 3 calcetines de un mismo color y otro distinto: aaar, rrrn...

Cuartetos con 2 calcetines de un mismo color y 2 de distinto otro color: aanr, rran...

Cuartetos con 2 calcetines de un mismo color y 2 de otro color: aann, rraa…

La cantidad mínima son 4 calcetines, sólo así se garantiza tener al menos 2 calcetines del mismo color.

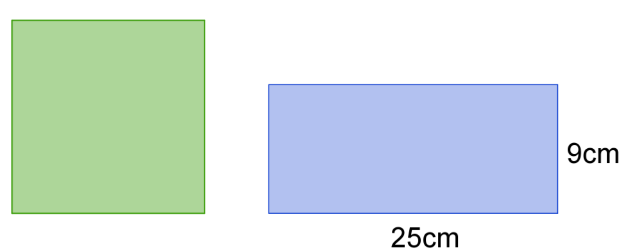
Descomposición del problema

Esta estrategia es muy útil porque muchas veces es difícil ver la relación entre los datos y las incógnitas de un problema. En estos casos la posibilidad que ofrece éxitos es la descomposición del problema en problemas más sencillos. Para ello, debemos considerar los siguientes pasos:

- Descomponer el problema en subproblemas, llevando un registro de las relaciones existentes entre esas partes como parte del problema total.
- Resolver los subproblemas.
- Combinar los resultados hasta lograr una solución del problema total.

Ejemplo 4

Halle la longitud del lado de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo de base 25m y altura 9m.



Solución

Para hallar la longitud del lado del cuadrado se debe calcular primero su área. Podemos, pues, descomponer el problema en dos subproblemas:

Hallar el área de un rectángulo, conocidas la longitud de su base y de su altura.

$A_{rectángulo} = 25cm \times 9cm = 225cm^2$

Hallar la longitud del lado de un cuadrado, conocida su área.

$A_{rectángulo} = A_{cuadrado}$

$A_{cuadrado} = l^2 = 225cm^2$

Si descomponemos 225 en sus factores primos tenemos:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{225} & \mathbf{5} \\ \mathbf{45} & \mathbf{5} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

Luego, el $A_{cuadrado} = 15cm \times 15cm = 225cm^2$; por tanto, la longitud del cuadrado es 15cm. Y esto coincide con la longitud del $A_{rectángulo}$.

Búsqueda de un contraejemplo

Esta estrategia se utiliza para demostrar la falsedad de un enunciado matemático. Esto significa que un enunciado matemático, que está expresado en forma general, se debe cumplir siempre. Pero si en un caso particular no se cumple, tal enunciado ya no es válido como teorema.

Ejemplo 5:

Marin Mersenne era un sacerdote franciscano y matemático aficionado. En la celda de su convento, en París, se reunían algunos famosos de la época, como Pascal, Fermat, Descartes. En esa celda se ideó la Academia de Ciencias de Francia, que fue creada en 1666.

Mersenne es recordado hoy por los números que llevan su nombre, son números de la forma: $M_p = 2^p - 1$, donde "p" es un número primo. Mersenne afirmó (1644) que los únicos valores de p para los cuales M_p es un número primo son:

p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Por ejemplo: si nos dicen compruebe que si todos los números son de la forma $M_p = 2^p - 1$ son primos.

$M_2 = 2^2 - 1 = 3$, $M_3 = 2^3 - 1 = 7$, $M_5 = 2^5 - 1 = 31$

Un contraejemplo será:

$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23\times89$; por tanto, no es número primo.

Contradicción

En la lógica, una afirmación o frase en la que se afirma a la vez una cosa y su contrario, recibe el nombre de Contradicción:

A y no A.

No podemos decir que sea cierto A y, también su contrario, no A.

Ejemplo 6

Cuatro niños de 2° grado son sospechosos de haber escondido las meriendas de sus compañeros. Estas son sus respuestas a las preguntas del profesor encargado de la investigación.

Antonio: "He visto a Carlos y a Luis entrar en la clase antes de que sonase la campana, así que uno de ellos debe ser el culpable."

Bernardo: "No he sido yo."

Carlos: "Ha sido Luis; lo he visto con un extraño objeto en la mano."

Luis: "Ha sido Bernardo, lo juro. Lo vi mientras huía."

Si sólo uno de ellos miente, ¿quién es el culpable?

Solución

Se puede preparar una tabla con las consecuencias de cada una de las declaraciones:

Personajes	Consecuencias	
Antonio	Dice la verdad	Carlos o Luis son culpables
	Miente	Ni Luis ni Carlos son culpables
Bernardo	Dice la verdad	Bernardo no es el culpable
	Miente	Bernardo es culpable
Carlos	Dice la verdad	Luis es el culpable
	Miente	Luis no es culpable
Luis	Dice la verdad	Bernardo es el culpable
	Miente	Bernardo

Comparemos las declaraciones, observe si pueden ser verdaderas o si, por el contrario, se contradicen.

Primera situación: Miente Antonio

Entonces: Antonio miente $\longrightarrow$ Carlos no es culpable y Luis no es culpable

Bernardo dice la verdad $\longrightarrow$ Bernardo no es culpable

Carlos dice la verdad $\longrightarrow$ Luis es culpable

Luis dice la verdad $\longrightarrow$ Bernardo es culpable

Observamos que hay una contradicción en las afirmaciones, puesto que Bernardo es inocente y culpable a la vez.

Segunda situación: Miente Bernardo

Entonces: Antonio dice la verdad $\longrightarrow$ Carlos es culpable o Luis es culpable

Bernardo miente $\longrightarrow$ Bernardo es culpable

Carlos dice la verdad $\longrightarrow$ Luis es culpable

Luis dice la verdad → Bernardo es culpable

Hay una contradicción en las afirmaciones, puesto que Luis es culpable e inocente a la vez.

Tercera situación: Miente Carlos

Entonces: Antonio dice la verdad → Carlos es culpable o Luis es culpable

Bernardo dice la verdad → Bernardo no es culpable

Carlos miente → Luis no es culpable

Luis dice la verdad → Bernardo es culpable

Hay una contradicción en las afirmaciones, puesto que Bernardo es inocente y culpable a la vez.

Cuarta situación: Miente Luis

Entonces: Antonio dice la verdad → Carlos es culpable o Luis es culpable

Bernardo dice la verdad → Bernardo no es culpable

Carlos dice la verdad → Luis es culpable

Luis miente → Bernardo no es culpable

En esta situación no existe ninguna contradicción. Por tanto, el culpable es Luis

Uso del libro en el aula

El libro sobre resolución de problemas es un complemento que permitirá a cada docente tener una herramienta de apoyo para su práctica en el aula mediante la incorporación de propuestas de problemas matemáticos en el área de algebra y aritmética, ya sea al final de un tema o como introducción del mismo. Lo esencial es que docente y estudiante acumulen el mayor número de estrategias que les permitan evolucionar en procesos de pensamiento matemático. Se sugiere que el libro sea utilizado en los niveles de Primer Ciclo y Segundo Ciclo de Educación Básica, aunque podría utilizarse, en algunos casos dosificando el contenido, a nivel de Tercer Ciclo.

Cada docente deberá primeramente leer los problemas e intentar resolverlos, recordando que un problema necesita determinación y estrategia; seguidamente puede recurrir a la lectura de la matriz de información de problemas para conocer las estrategias y pre saberes necesarios para entrar en el proceso de solución y, como último recurso, deberá leer la solución.

El libro tiene la enorme ventaja de que su punto de partida es la integración de procesos de desarrollo de competencias matemáticas fundamentales, como lo son: conocimientos, habilidades y destrezas que el estudiantado puede adquirir al finalizar la lección, es decir, se pretende que con ayuda docente desarrolle las competencias esenciales en Matemática para una formación científica de calidad y con capacidad de innovación. Dichas competencias son:

i. Saber argumentar.
ii. Saber cuantificar.
iii. Saber analizar críticamente la información.
iv. Saber representar y comunicar.
v. Saber enfrentar y resolver problemas.

Para una mejor compresión, los contenidos que vienen están estructurados de la siguiente manera:

1. **Lista de Problemas.** Se proponen 55 problemas, de en su mayoría vinculados al uso de la Aritmética, Geometría, Técnicas de conteo y Lógica que tienen diferentes niveles de complejidad y áreas.
2. **Matriz de identificación de pre saberes y ubicación en los programas de Primer Ciclo Segundo Ciclo de Educación Básica**. En esta matriz se reflejan las necesidades en términos de pre saberes, estrategia y ubicación en el programa lo que posibilita inducir su uso como tareas, actividades relevantes, discusión guiada para fundamentar procesos

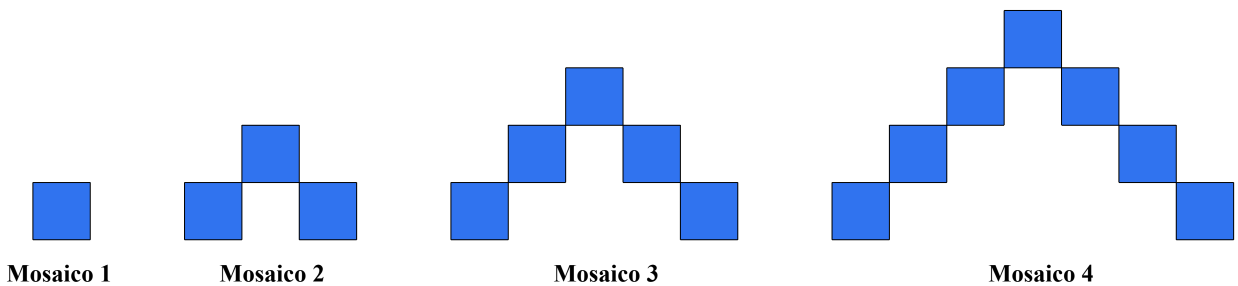
de pensamiento lógico, argumentación y reflexión en la acción de procesos y estrategias de resolución de problemas.

3. **Solución de problemas.** En este apartado se encuentran las soluciones de los problemas propuestos, para hacer una lectura reflexiva sobre las estrategias utilizadas en el proceso de solución.

Lista de Problemas

Problema 1

Dada la siguiente sucesión de mosaicos



Si la cantidad de mosaicos que forman cada figura continúa aumentando con la misma lógica:

¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 10?

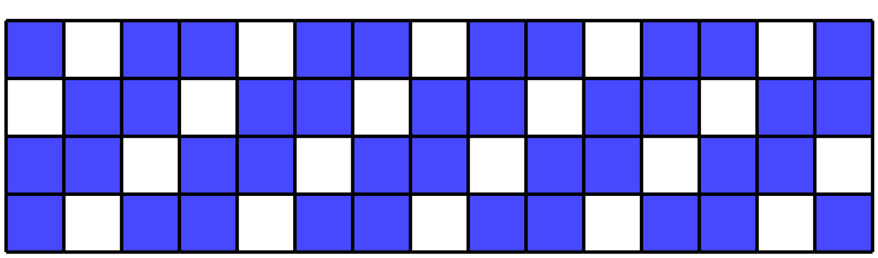
¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 20?

¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 50?

Encontrar el patrón de recurrencia y la expresión general que describe la cantidad de cuadros que tienen todos los mosaicos así construidos. Es decir, su modelo matemático.

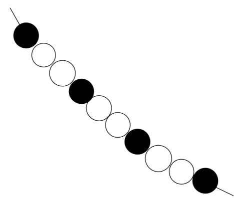
Problema 2

Un tablero de 4 filas y 503 columnas se colorea de azul y blanco, según el patrón mostrado en la figura. Del total de 2012 cuadros en el tablero, ¿cuántos cuadros estarán pintados de azul?



Problema 3

En el collar dibujado se combinan dos colores, y a su patrón de formación lo podemos expresar como "negra-blanca-blanca, negra-blanca-blanca, negra-blanca-blanca…", o en modo más abreviado: NBBNBBNBBNBB… donde N significa negra y B blanca



Fabricaremos tres collares diferentes de 100 bolitas. En cada caso propuesto se debe seguir un patrón que deberá repetirse a lo mucho cada 4 bolitas. Para cada collar se cuenta con 100 bolitas negras y 100 bolitas blancas. Los collares deben contener ambos colores.

a) ¿Cuál es el patrón correspondiente a cada uno de los collares que se habrán construido?
b) ¿Cuál es el color que le corresponderá a la bolita 50 de cada uno de los collares construidos anteriormente? ¿Y la bolita 100 qué color tendrá?

Problema 4

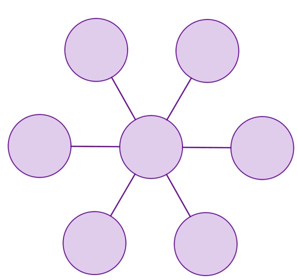
¿Qué patrón sigue la siguiente tira de números? ¿Podrías completar la información faltante?

2	**9**	**16**	**23**			

Si continuara la tira, ¿estará el número 100? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué ocurre con el número 198? ¿Con el número 200? Escriba un número mayor que 2014 que nunca aparecerá en esta tira. ¿Cómo lo sabe con seguridad? ¿Cuál es el modelo matemático de la sucesión de números?

Problema 5

Los dígitos entre 1 y 7, ambos inclusive, se distribuyen en la figura que se muestra (una en cada círculo), de tal manera que los tres números sobre una misma línea sumen siempre 12. ¿Qué número debe ir en el círculo central?



Problema 6

Se ordenan los números naturales como se muestra en la figura. ¿Cuántos números habrá en total hasta la fila 100?

1

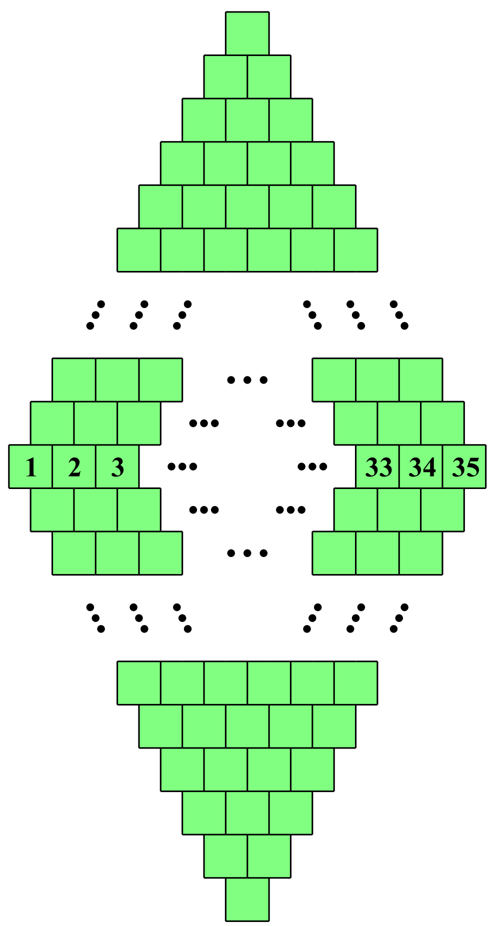
2 3

4 5 6

7 8 9 10

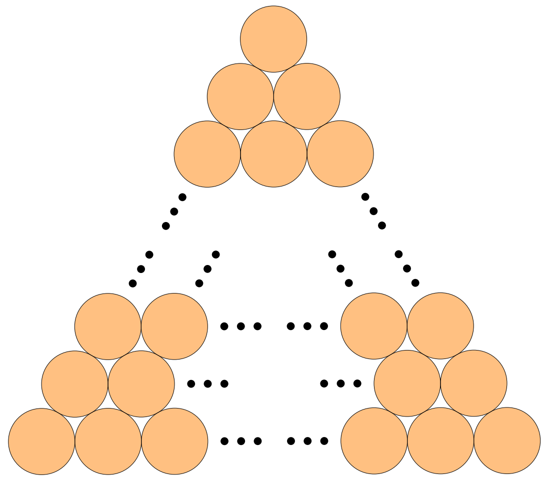
Problema 7

¿Cuántos cuadros habrá en la siguiente figura, si la fila más grande tiene 35 cuadros?



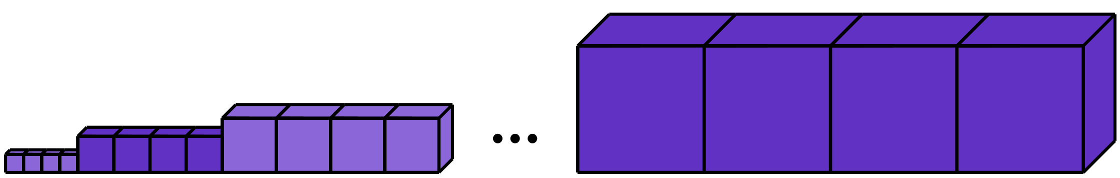
Problema 8

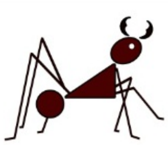
Hallar el total de puntos de contacto que hay determinados en la siguiente figura, que tiene 349 filas de círculos:



Problema 9

Carlos abrió un taller de dulces de mazapán en su colonia. La forma de estos dulces es de cubos perfectos. Carlos decide hacer dulces de todos los tamaños que sus clientes puedan desear. Por ello, hace dulces de 1, 2, 3 … 32 centímetros de arista. Los dulces son envueltos en paquetes de cuatro dulces colocados en línea recta. Carlos coloca los paquetes de dulces de menor a mayor tamaño en un estante, como se muestra en la figura.





Una hormiga queda un día atrapada justo al final del primer paquete de dulces. La hormiga, muy golosa y dispuesta a hacerse un festín con los dulces de Carlos, decide atravesar los dulces en línea recta hacia los dulces de mayor tamaño. La hormiga logró, de esta forma, atravesar el primer dulce del último paquete cuando fue descubierta y, para su disgusto, fue retirada de los dulces.

Considerando que el paquete de los dulces tiene un grosor de $\frac{1}{31}$ centímetros, ¿qué distancia recorrió la hormiga comiendo a través de los paquetes de dulces de mazapán?

Problema 10

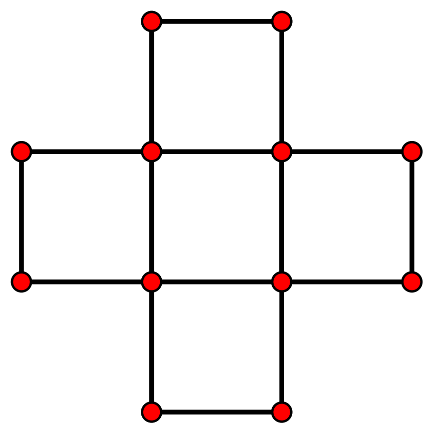
Maritza, Oscar, Carlos, Félix y Ulises están sentados formando un círculo, en el orden indicado. Maritza dice el número 63, Oscar el 62, Carlos el 61, Félix el 60, Ulises el 59, y así sucesivamente. ¿Quién dice el número 1?

Problema 11

¿Cuál es el resto de dividir el producto 2010×2011×2012 entre 12? (argumenta sin realizar la operación)

Problema 12

En el siguiente gráfico se muestran cinco cuadrados, en los que se han pintado de rojo sus 12 vértices (algunos vértices pertenecen a varios cuadrados). ¿Cuántos cuadrados tienen todos sus vértices de color rojo?



Problema 13

¿Cuánto suma cada fila de un cuadrado mágico de magnitud tres? Un cuadrado mágico de magnitud tres se puede entender como una cuadrícula de 3×3 en la cual se ubican los números del 1 al 9. Estos deben estar colocados de tal forma que la suma de los números de las casillas (horizontales, verticales y diagonales) den el mismo resultado.

Problema 14

El 30 de febrero cumple años mi papá y se había preparado un pastel para su cumpleaños, pero al llegar a casa a preparar la fiesta el pastel había desaparecido. En mi casa hay cinco hermanos más: Melissa, Maritza, Carlos, Oscar y Félix. Mi mamá sabe que alguno o varios, son los autores de haberse comido el pastel y los interroga, he aquí sus respuestas:

Melissa: “Esto es obra de uno sólo de nosotros”.

Maritza: “No, de dos de nosotros”.

Carlos: “No, de tres de nosotros”.

Oscar: “No, de cuatro de nosotros”.

Félix: “Entre todos lo comimos”.

Mi mamá sabe que los inocentes dicen la verdad, mientras que los culpables mienten. ¿Quién o quiénes son los inocentes?

Problema 15

¿Cuántos números como mínimo se deben borrar del siguiente tablero para lograr que, con los números que queden, se cumpla que la suma de cada fila y de cada columna es un número par?

2	0	1	4
0	2	4	1
1	5	2	0
5	1	0	2

Problema 16

Si las letras G, O, L, E y S representan números dígitos, no todos cero (no necesariamente diferentes), tales que GOL × GOL = GOLES. Calcular $G + O + L + E + S$.

Problema 17

En la siguiente expresión aritmética, las letras distintas representan dígitos distintos:

$$2011 - BOL - SO - NES$$

¿Cuál es el menor valor posible de la operación?

Problema 18

Jorge, Oscar, Adela, Carlos, Norma y Alicia se sientan en 6 sillas. Se sabe que Jorge se sienta al extremo derecho, además Carlos y Alicia se sientan al extremo izquierdo. Diga usted cuál de las alternativas siempre se cumple, sabiendo que personas del mismo género no pueden estar juntas.

a) Adela está junto a Jorge.
b) Oscar está al extremo izquierdo.
c) Norma está junto y a la izquierda de Jorge.
d) Adela está junto a Oscar.
e) Norma está a la izquierda de Oscar.

Problema 19

El caracolito Frikencio decidió cambiar de casa y se marchó al huerto de Maritza, que estaba muy cercano. En este huerto abundaban sabrosas coliflores, deliciosas lechugas y las más delicadas hortalizas que un caracol de paladar refinado pudiera desear. El único problema era la presencia de un muro de separación de 20 metros de altura. Frikencio, con su casa y sus cosas a cuestas, decidió escalarlo. Cada día conseguía escalar 4 metros verticales, pero como el muro era húmedo y resbaladizo cada noche, mientras dormía, resbalaba 2 metros hacia abajo. Así, cada día recorría sólo 2 metros de su agotador viaje. ¿Cuántos días necesitó Frikencio para llegar a la mitad del muro? ¿Cuántos días tardó en llegar a 2 metros de la altura total del muro?¿Llega Frikencio de día o de noche a la máxima altura del muro?

Problema 20

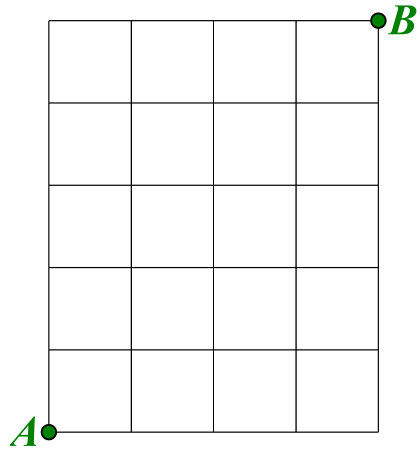
Si †, ✧, ⊛ son dígitos, ¿cuántos dígitos tiene la máxima suma posible para la operación que se muestra a continuación?

$$\begin{array}{ccc} & 7 & \circledast \\ & \dagger & 9 \\ 8 & ✧ & 6 \\ \hline \end{array}$$

Explique su solución y su razonamiento; diga, además, ¿cuál es el valor de la suma mínima?

Problema 21

¿De cuántas maneras puedo llegar desde A hasta B, caminando sólo hacia la derecha o hacia arriba?



Problema 22

El profesor Ulises preguntó a cuatro de sus estudiantes: ¿cómo se ordenarían ustedes respecto a sus edades de mayor a menor? A lo que cada una de las niñas contestó:

Maritza: "Mi amiga Adela es mayor que yo".

Adela: "Silvia es mayor que yo".

Silvia: "Yo nací antes que Rocío".

Rocío: "Yo soy mayor que Adela y menor que Silvia".

Analice sus respuestas e indique el orden pedido por el profesor.

Problema 23

Félix vive en la casa número 36 de la calle principal de Aguas Calientes, Chalatenango. Un día se presenta un empleado de la Alcaldía que prepara el censo municipal. A la pregunta sobre el número de hijos y su edad, Félix responde en tono bromista: "Tengo tres hijos, dos son gemelos, y el producto de sus edades coincide con el número de mi casa y la suma de sus edades con mi edad".

El empleado de la Alcaldía, prestándose al juego, hace algunas cuentas y pide nueva información, ya que la que posee no es suficiente para complementarla. Entonces, Félix añade que la suma de las tres edades es impar y que su hijo mayor tiene ojos azules.

Problema 24

Las páginas de un libro de resolución de problemas matemáticos escrito en la GECTI deben ser numeradas. Para ello uno de los autores ha empleado 2989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Problema 25

La semana pasada he leído $\frac{1}{7}$ de un libro de resolución de problemas. A lo largo de esta semana he podido leer $\frac{4}{5}$ del resto. En total, he leído 87 páginas. ¿Cuál es el número total de páginas del libro?

Problema 26

Hemos vaciado agua contenida en un barril, en 41 recipientes de $\frac{3}{4}$ litros cada uno. Estos han quedado llenos, salvo uno de los recipientes que ha quedado hasta la mitad. En el barril sobran 14 litros. ¿Cuántos litros de agua contenía el barril?

Problema 27

En una alcaldía de un municipio de Usulután se tiene previsto destinar $\frac{3}{14}$ de una finca para un museo de ciencias y matemática y un área ecológica. Se destinarán $\frac{3}{4}$ de lo previsto al área ecológica. ¿Qué fracción de la finca se ha destinado a la zona del museo?

Problema 28

De un depósito de cereales se han extraído $\frac{8}{10}$ y al día siguiente se extrae $\frac{3}{4}$ del resto que quedó. ¿Cuánto se extrajo en total del depósito? Resolver este problema gráficamente.

Problema 29

Si en un banco tengo un capital de $100, ¿cuánto dinero tendré al final de tres años con un interés de 5% anual? ¿Cuánto habré ganado? ¿Cuál es mi porcentaje de ganancia al final de los tres años? Considere que el interés ganado se agrega al principal de la cuenta al final del año.

Problema 30

Si tengo que pagar $ 80 del sobrante del 12% de $120, ¿cuánto dinero me sobra?

Problema 31

Un DVD cuesta $56. ¿Cuánto deberá cancelar, si además de los $56, debe pagar 13% de impuestos?

Problema 32

¿Qué porcentaje representa de aumento en el precio de un producto que cuesta 120 y hace un mes costaba 60?

Problema 33

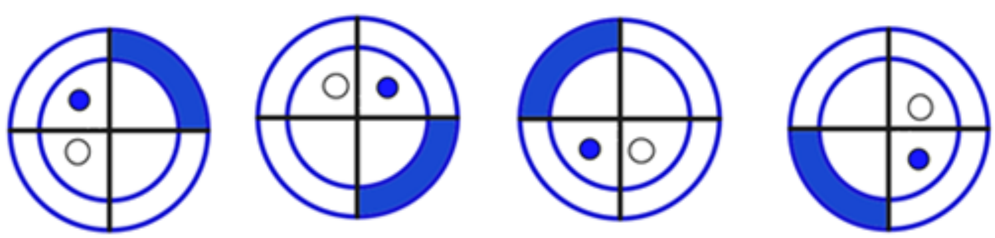
¿Qué número es mayor, el 40% de 50 o el 50% de 40?

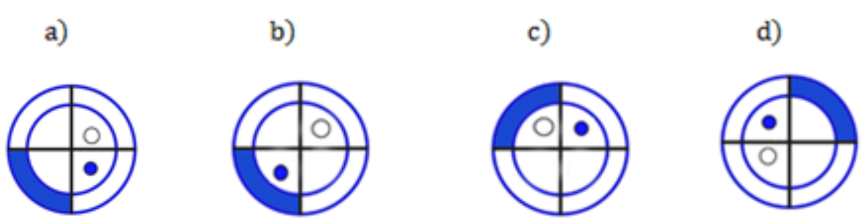
Problema 34

Suponga que ahorra dos cantidades iguales en dos bancos diferentes. Ambas cantidades son de $1,000. En el banco A, con tasa de interés de 3% mensual; y en el banco B, es 9% trimestralmente. ¿En cuál de los bancos se obtienen mayor ganancia por intereses al final de un año?

Problema 35

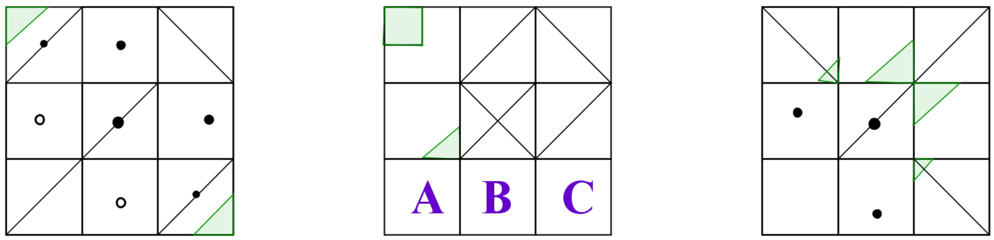
Determine la figura que continúa de la secuencia:

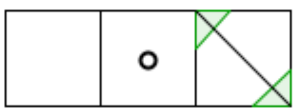


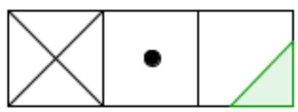


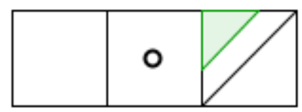
Problema 36

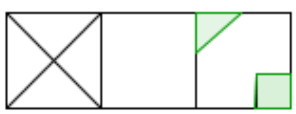
Argumente el proceso con el cual se obtiene la alternativa que debe ir en la posición de la palabra ABC.



a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Problema 37

Observe las siguientes figuras y determine qué tipo de isometría o movimiento, que preserva todas las distancias y por ello preserva el tamaño y la forma, se observa en las siguientes figuras. Argumente su respuesta.

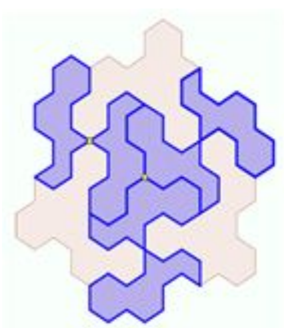


Figura 1

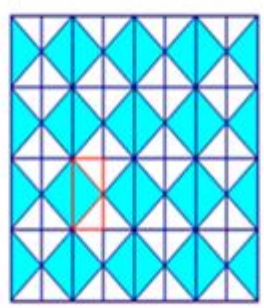
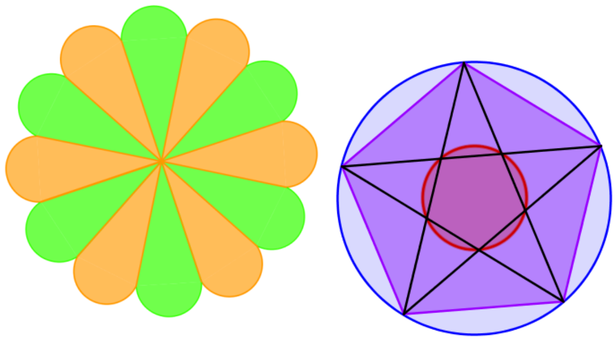


Figura 2

Figura 3

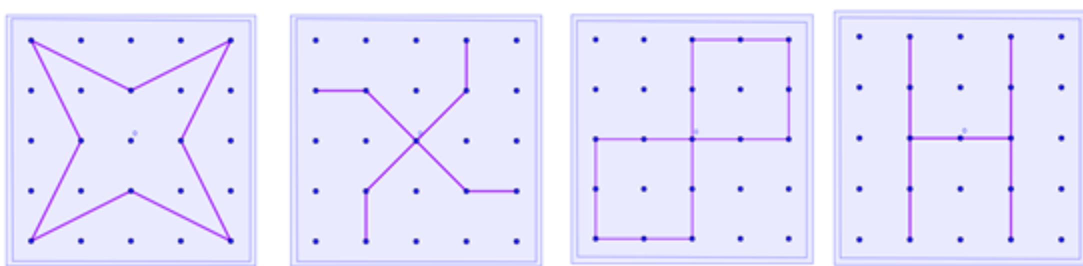
Problema 38

¿Cuántos ejes de simetría tienen las siguientes figuras?



Problema 39

¿Cuál de estas figuras será la misma después de $\frac{1}{4}$ de giro? ¿Y de $\frac{1}{2}$ de giro? ¿Cuál es su argumento?



A B C D

Problema 40

En un negocio de venta de sorbetes se ofrecen 20 sabores. Un cliente puede pedir un sorbete con una o con dos bolas; si pide dos bolas pueden ser del mismo sabor o diferentes. ¿Cuántos sorbetes de diferentes sabores ofrece el negocio?

Problema 41

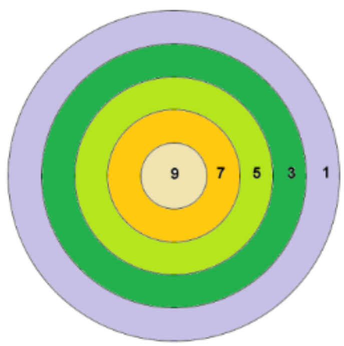
Félix acude a un restaurante con sus dos gemelos y una hija, que es dos años mayor. La porción de pollo cuesta \$4.6 para personas adultas, las niñas y los niños pagan \$ 0.45 por cada año de su edad. Después de comer, Félix paga \$16.30. ¿Cuáles son las edades de sus dos hijos y de su hija?

Problema 42

El Centro Escolar República de El Salvador está preparando una excursión a la Costa del Sol. En cada autobús que alquilan para dicho evento deben ir 40 estudiantes y sólo se permite un autobús que lleve menos de 40. ¿Cuántos autobuses se necesitan para transportar simultáneamente a 736 estudiantes del centro escolar? Además, el estudiantado está feliz, porque no irán los docentes. Pero a última hora, la Dirección decide completar con docentes el bus que lleva menos de 40 estudiantes. ¿Qué cantidad de docentes irá a la excursión?

Problema 43

Ulises está lanzando dardos sobre una diana que presenta 5 anillos circulares con sus respectivas puntuaciones: 1, 3, 5, 7, y 9. Ulises lanza 3 dardos que se clavan todos sobre distintos anillos de la diana. ¿Cuáles son todas las posibilidades de puntaje que pudo haber obtenido Ulises? ¿Es posible obtener puntaje 16?



Problema 44

En la suma:

$$\begin{array}{cccc} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ & \mathbf{B} & \mathbf{B} & \mathbf{B} \quad + \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{array}$$

Si A, B y C representan dígitos diferentes, ¿cuáles son estos dígitos?

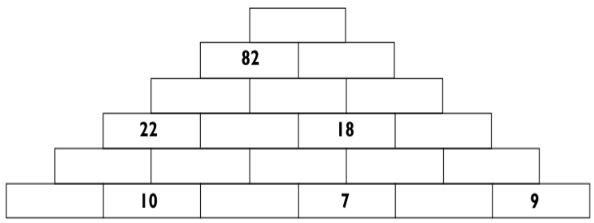
Problema 45

Carlos es nuestro vendedor de sorbetes de carretón. Él vende sorbetes de fresa (F), de chocolate (C), de vainilla (V). Recientemente hizo un sondeo entre sus últimos 121 clientes y descubrió que 42 prefieren primero la fresa, luego los de vainilla y finalmente los de chocolate. Representamos esta información así: 42: $F > V > C$

Pero también descubrió que 40 prefieren primero chocolate, luego los de vainilla y finalmente los de fresa. Representamos esta información así: 40: C > V > F. Finalmente 39 prefieren primero vainilla, luego los de chocolate y finalmente los de fresa. Representamos esta información así: 39: V> C > F. Si se toma toda esta información en conjunto, ¿cuál es el verdadero orden de preferencia que la clientela manifiesta acerca de los tres sabores de helados?

Problema 46

En este problema se representa una "pirámide numérica", en cada cuadro se tiene asignado un número natural. Este número se obtiene sumando los números que están en los cuadros del piso inferior que sirven de base. ¿Qué número se encuentra en la cúspide de la pirámide?



Problema 47

El año pasado, Maritza, Melissa, Yolibeth y Rocío siguieron un curso de tenis, pero dadas sus distintas obligaciones de estudio y trabajo, no pudieron asistir al mismo número de lecciones. Melissa asistió al doble de lecciones que Rocío, Yolibeth a cuatro veces más clases que Maritza, pero tres menos que Melissa. Maritza en total asistió a 15 clases. ¿A cuántas clases fue Rocío?

Problema 48

En cada uno de los casilleros se han cambiado de lugar cuatro números (uno por cada línea). Reubíquelos en su casilla, de manera que la suma de los números de cada fila arroje el mismo resultado.

6	5	8	6
3	7	9	4
7	5	8	3
6	9	4	6

2	6	4	3
1	3	3	2
9	3	1	3
5	1	1	1

Problema 49

Las tres hijas de un ganadero de Chalatenango heredan del padre 51 vacas, que se deberán repartir entre ellas del siguiente modo: la mitad para la primera hija, un tercio para la segunda y una novena parte para la tercera.

La partición parece imposible de realizar sin sacrificar una vaca. Así pues, deciden acudir a una jueza que por cierto también es experta en Matemática. ¿Cuántas vacas debe la jueza agregar como mínimo a la herencia, para que todas se vayan felices con la repartición y no se sacrifique ningún animal?

Problema 50

Un señor entra en una tienda para comprar 4 litros de aceite. El vendedor, a quien se le han roto todos los recipientes de un litro que suele emplear como unidad de medida, se ve obligado a calcular de otra forma. Tiene a su disposición los siguientes recipientes:

- Un recipiente A lleno de aceite, con 8 litros de capacidad.
- Un recipiente B vacío, de 5 litros de capacidad.
- Un recipiente C vacío, de 3 litros de capacidad.

¿Cómo se las arreglará el vendedor para dar al cliente 4 litros de aceite contenidos en el recipiente más grande(A), usando como medida sólo los tres recipientes A, B y C descritos arriba?

Problema 51

Un vendedor de frutas me ha planteado el siguiente problema: tres guineos que individualmente tienen igual peso, en conjunto pesan igual que dos manzanas que a su vez individualmente tiene el mismo peso.

Dos manzanas pesan igual que una naranja acompañada de un guineo. Si se sabe que un guineo y una manzana pesan 300 gramos, ¿cuánto pesa el guineo, la manzana y la naranja?

Problema 52

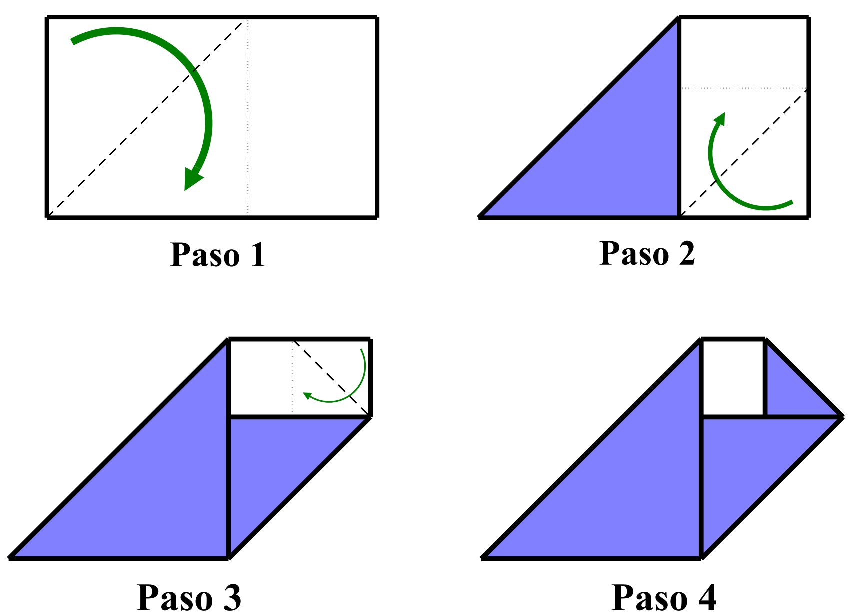
A un pueblo del municipio de Usulután, conocido como el pueblo misterioso, llega una turista. En ese pueblo sus habitantes dicen la verdad lunes, miércoles, viernes y domingo, mientras que martes, jueves y sábados, mienten. La turista, que es despistada, no sabe exactamente en qué día ha llegado y se propone investigarlo sosteniendo un dialogo con una habitante:

- Turista: "¿Qué día es hoy?"
- Habitante: "Sábado".
- Turista: "¿Qué día será mañana?"
- Habitante: "Miércoles".

¿Qué día deduce la turista?

Problema 53

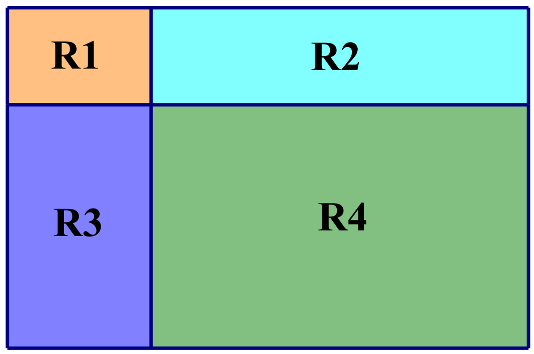
Una hoja rectangular de papel, blanca de un lado y azul del otro, fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:



El rectángulo blanco en el **Paso 2**, tiene $20cm$ más de perímetro que el rectángulo blanco del **Paso 3**. Éste a su vez tiene $16cm$ más de perímetro que el rectángulo blanco del **Paso 4**. Determine el área de la hoja de papel completa, es decir, la hoja sin dobleces.

Problema 54

El rectángulo de la figura está dividido en cuatro rectángulos más pequeños mediante dos líneas paralelas en sus lados. En tres de ellos se ha escrito el perímetro correspondiente. ¿Cuál es el perímetro del cuarto rectángulo?



Problema 55

Se eligen dos números enteros entre 1 y 100, inclusive tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?

Ubicación Curricular de los Problemas

Problemas para el Programa de Primer Grado

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
Unidad 1: ¡Qué divertida la matemática!. Conceptos básicos de ubicación espacial. Tamaño, forma y color. Series.	Problema 1, Problema 3.	Conteo de números, Secuencia de figuras	Patrones, Descomposición del problema.
Unidad 2: ¡Contemos y ordenemos! Números naturales del 1 al 9, el cero, números ordinales hasta el noveno.	Problema 1, Problema 3, Problema 48.	Conteo y números ordinales, Números de 1 al 9, Conteo	Patrones, Descomposición del problema
Unidad 3: ¡Juguemos con líneas! Tipos de líneas por su posición y forma.	Problema 12.	Trazos de líneas	Descomposición del problema
Unidad 4: ¡Aprendamos la suma! Sentidos de la suma, sumas con totales hasta 9.	Problema 2, Problema 3.	Suma con figuras cuadradas. Suma con figuras circulares	Descomposición del problema, Patrones
Unidad 5: ¡Comencemos a restar! Sentidos de la resta, resta sin prestar con minuendo hasta 9.	Problema 2, Problema 19.	Resta con figuras Resta de números del 1 al 9	Patrones, Descomposición del problema
Unidad 6: ¡Descubramos las formas! Forma de los cuerpos geométricos, superficies planas y curvas y dimensiones largo, ancho y alto.	Problema 12, Problema 8.	Identificación de figuras (cuadrados, triángulos, círculos)	Descomposición del problema
Unidad 7: ¡Contemos hasta el 9! Formación de la decena, valor posicional, suma y resta horizontal y vertical con totales hasta 19.	Problema 3, Problema 5, Problema 15, Problema 13.	Suma con figuras., Sumar, Restar, Sumar	Patrones, Descomposición del problema
Unidad 8: ¡Conozcamos las figuras! Figuras geométricas: triángulo, cuadrado, rectángulo, largo y alto, interior, exterior y borde .	Problema 12, Problema 8.	Definición de cuadrados, Definición de triángulo círculo	Descomposición del problema
Unidad 9: ¡Sumemos y restemos hasta 99! Suma y resta vertical sin llevar y llevando, sin presta y prestando, con totales y minuendos menores que 100.	Problema 4, Problema 15.	Suma con figuras, Restar	Ensayo-Error, Patrones
Unidad 10: ¡Comparemos y compremos! Medidas convencionales y no convencionales, de capacidad,	Problema 19, Problema 51.	Medidas de longitudMedidas de Peso	Descomposición del problema

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
longitud y peso, moneda.			

Problemas para el Programa de Segundo Grado

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
Unidad1: ¡Contemos y ordenemos! Formación de la centena, números naturales hasta 999, orden y comparación de números, aproximación a la decena o centena próxima, números ordinales hasta 20°.	Problema 1, Problema 3, Problema 5.	Sumar, Sumas con figuras, Sumar hasta 19	Patrones, Descomposición del problema, Ensayo-Error.
Unidad 2: ¡Juguemos con líneas! Recta y segmento de recta, ángulos.	Problema 12, Problema 21.	Posiciones de líneas, Posiciones (Derecha, izquierda, arriba y abajo)	Descomposición del problema, Ensayo-Error.
Unidad 3: ¡Aprendamos más de suma y resta! Suma sin llevar y llevando, uno y dos veces con totales hasta 999, resta sin prestar y prestando, uno y dos veces con minuendos hasta 999	Problema 1, Problema 2, Problema 13, Problema 15, Problema 20.	Sumar, Sumas hasta 19, Números pares.	Patrones, Descomposición del problema, Ensayo-Error.
Unidad 4: ¡Formemos figuras! Figuras planas, elementos del triángulo y el cuadrilátero: vértices, ángulos internos y lados. Noción de superficie.	Problema 12, Problema 8.	Definición de un cuadrado y vértices	Descomposición del problema
Unidad 5: ¡Comencemos a multiplicar! Multiplicación: Sentido de la multiplicación-elementos en cada grupo por el número de grupos- con multiplicando y multiplicador hasta 10. Tabla de multiplicar de doble entrada.	Problema 2.	Definición de la multiplicación	Descomposición del problema
Unidad 6: ¡Midamos los objetos! Medidas convencionales de longitud, Sistema Métrico Decimal, metros, decímetros y centímetros y sus equivalencias. La regla (uso). Medidas de capacidad: litro y botella. Medidas de peso: libra. La balanza (uso).	Problema 19, Problema 26, Problema 51.	Medidas de longitud, Medidas de capacidad, Medidas de peso	Descomposición del problema
Unidad 7: ¡Repartamos con los amigos y las amigas! División: como operación inversa a la multiplicación y con el sentido de repartición. División exacta con dividendo, de dos cifras y divisor de una cifra.	Problema 2	Definición de la división	Descomposición del problema.
Unidad 8: ¡Clasifiquemos los objetos! Cuerpos geométricos, cubos, sólidos rectangulares y esferas, superficie y	Problema 8, Problema 12.	Definición de figuras triangulares y circulares,	Descomposición del problema

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
elementos del cubo y de los sólidos rectangulares.		Definición de cuadrado	
Unidad 9: ¡Midamos y Compremos! Moneda, Billetes de 1, 5, 10 y 20 dólares (equivalencias.)Tiempo: día, hora, minutos y segundos (equivalencia). Presupuesto.	Problema 19, Problema 52.	Unidades de tiempo y medida de longitud. Tiempo (días de la semana)	Descomposición del problema. Contradicción, Ensayo-Error

Problemas para el Programa de Tercer Grado

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
Unidad 1: ¡Contemos y ordenemos!Formación de la unidad de millar. Números naturales hasta 9 999, composición, descomposición, uso del signo = como equivalencia. Comparación de números de cuatro cifras. Números ordinales hasta el 30°.	Problema 5, Problema 7, Problema 13, Problema 20, Problema 24.	Sumar, Sumar llevando, Valor posicional.	Ensayo-Error. Descomposición del problema. Patrones
Unidad 2: ¡Juguemos con líneas! Ángulos rectos, obtusos y agudos. Transportador, escuadra. Líneas perpendiculares y paralelas.	Problema 8, Problema 12.	Figuras circulares y triangulares, Figuras cuadradas	Descomposición del problema
Unidad 3: ¡Aprendamos más de suma y resta! Suma sin llevar y llevando, hasta de tres sumandos, llevando una, dos o tres veces con totales hastade 9 999; resta sin prestar y prestando una, dos y tres veces con minuendos hasta de cuatro cifras.	Problema 7, Problema 10, Problema 17.	Sumar, Conteo, Valor posicional	Patrones, Descomposición del problema
Unidad 4:¡Conozcamos más de triángulos y cuadriláteros! Elementos del Triángulo: base y altura. Triángulos equiláteros, isósceles y escalenos. Uso de compás. Elementos del cuadrilátero: base, altura y diagonal. Cuadrados y rectángulos.	Problema 12, Problema 8, Problema 53, Problema 54.	Figuras cuadradas , Definición de triángulos, Definición de área, Definición de perímetro	Descomposición del problema
Unidad 5: ¡Multipliquemos y combinemos con suma y resta!Multiplicación abreviada por la unidad seguida de ceros, multiplicación, sin llevar y llevando en el proceso, con multiplicador de un dígito y productos hasta de 9 999...	Problema 16, Problema 23.	Descomposición de un número, Número primo	Descomposición del problema, Ensayo-Error.
Unidad 6. : ¡Clasifiquemos los sólidos! Sólidos geométricos: cono, cilindro, pirámide, esfera. Elementos de los sólidos geométricos: cara, vértice, arista.	Problema 12.	Figuras geométricas cuadradas	Descomposición del problema

Temas	Problema	Pre saberes	Estrategias
Noción de volumen (espacio que ocupan los cuerpos).			
Unidad 7:¡Utilicemos la división! División con los sentidos de repartir y agrupar. División horizontal, exacta e inexacta, con dividendos de dos cifras y divisores de una cifra (uso de la tabla de multiplicar); división vertical con dividendo hasta el 999 y divisor de una cifra, exacta e inexacta.	Problema 6.	Sumar	Descomposición del problema
Unidad 8: ¡Midamos y dividamos longitudes! Longitudes. Fracciones, como división de la unidad en partes iguales, términos de la fracción: numerador y denominador; representación gráfica de las fracciones, fracciones en la recta numérica.	Problema 25, Problema 27, Problema 28.	Proporcionalidad, Interpretación geométric, Equivalencia de fracciones	Descomposición del problema
Unidad 9: ¡Organicemos datos! Encuestas, conteo de datos en tablas y grafica de barras.	Problema 10, Problema 19.	Organización de datos, Interpretación de datos	Descomposición del problema.
Unidad 10: ¡Midamos y compremos! Tiempo, intervalos de tiempo, suma y resta para determinar periodos de tiempo. Peso: la onza como unidad de medida suma y resta de pesos; uso de la balanza. Capacidad: litro (l), decilitro (dl), centilitro (cl) y mililitro (ml) como unidades de medida; relación entre litro y decilitro, litro y mililitro. Moneda: suma y resta con cantidades de dinero combinan billetes y monedas.	Problema 19, Problema 26, Problema 42, Problema 50.	Ubicación en el tiempo, Suma de unidades de capacidad, Operaciones básicas con cantidades de dinero, Secuencia de orden	Descomposición del problema.

Problemas para el Programa de Cuarto Grado

Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
Unidad 1: Utilicemos más números y sus operaciones Números naturales hasta 1000,000. Lectura y escritura, descomposición y ordenamiento. Valor posicional. Redondeo a la unidad de millar, decena de millar o centena de millar. Problemas de suma y resta sin exceder de 1000,000.	Problema 17, Problema 24, Problema 44, Problema 46.	Valor posicional, Descomposición de un número Valor posicional, Números enteros	Descomposición del problema Ensayo-Error
Unidad 2: Encontremos el área de los triángulos. Medida de ángulos, uso del transportador, construcción de ángulos según sus aberturas. Construcción de triángulos, cálculo de área de triángulos,	Problema 53, Problema 54.	Definición de perímetro, Definición de áreas	Descomposición del problema

Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
igualdad de áreade triángulos cuando los triángulos tienen la misma longitud de base y altura.			
Unidad 3: Multipliquemos y dividamos. Multiplicación cuyo producto sea menor que 1, 000, 000; sin llevar y llevando en todos los casos. División cuyo dividendo sea menor que 1,000,000; sin residuo y con residuo. Múltiplos y divisores de un número. Operaciones combinadas. Orden de cálculo según las operaciones. Uso de paréntesis.	Problema 11, Problema 16, Problema 23, Problema 46, Problema 55.	Criterios de divisibilidad, Producto de números iguales, Descomposición de un número,Números enteros, Múltiplos y ordenamiento de números.	Descomposición del problema
Unidad 4: Construyamos cuadriláteros. Identificación y construcción de cuadriláteros (rombo, romboide, trapecio, trapezoide) altura y base de cuadriláteros, resolución de ejercicios y problemas sobre cuadriláteros.	Problema 12, Problema 53, Problema 54.	Figuras geométricas, Definición de perímetro, Definición de área	Descomposición del problema
Unidad 5: Aprendamos números decimales. Números decimales hasta las milésimas, suma y resta. Conversión de fracciones decimales a números decimales. Longitudes en metros, decímetros y centímetros.	Problema 29, Problema 30, Problema 31, Problema 34.	Propiedad asociativa, Sumar, Sumar y multiplicar, Propiedad asociativa.	Descomposición del problema.
Unidad 7: Operaciones con fracciones. Fracciones propias e impropias, equivalencia de fracciones mixtas e impropias, amplificación y simplificación de fracciones, comparación de fracciones, adición y sustracción de fracciones homogéneas.	Problema 9, Problema 25, Problema 26, Problema 27.	Operaciones básicas, Particiones, Simplificación de fracciones, Interpretación geométrica	Descomposición del problema
Unidad 8: Identifiquemos otras figuras. Reconocimiento de polígonos. Identificación de diagonales, clasificación de polígonos, polígonos cóncavos y convexos.	Problema 12.	Figuras geométricas.	Descomposición del problema
Unidad 9: Interpretemos datos. Construcción e interpretación de tablas, gráficas de barras verticales y horizontales, pictogramas. Cálculo y aplicación de la media aritmética.	Problema 14, Problema 18, Problema 34, Problema 40, Problema 47.	Análisis de datos, Posiciones, Interpretación de porcentaje, Combinaciones, Análisis de datos	Descomposición del problema
Unidad 10: Apliquemos medida del entorno. Quintal, libra y arroba; equivalencias y conversiones. Tonelada y quintal; equivalencias y conversiones. Sumas de peso en unidades no decimales. Medición de tiempos y presupuestos.	Problema 51.	Operaciones básicas	Ensayo-Error. Descomposición del problema

Problemas para el Programa de Quinto Grado

Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
Unidad 1: Encontremos múltiplos y divisores comunes. Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5 y 10. Números primos y compuestos. Mínimo común múltiplo, máximo común divisor y descomposición en factores primos.	Problema 11, Problema 16, Problema 23.	Números primos, Valor posicional, Descomposición de un número	Descomposición del problema
Unidad 3: Utilicemos números decimales. Multiplicación y división de números decimales, combinados con naturales. Redondeo de números decimales hasta las décimas, centésimas o milésimas.	Problema 26, Problema 29, Problema 30, Problema 33.	Operaciones básicas, Sumar y multiplicarm Operaciones básicas, Multiplicación	Descomposición del problema
Unidad 4: Dibujemos con círculos y polígonos. **Identificación de los elementos del círculo y cálculo de la longitud de la circunferencia. Usos de compás. Ángulo central y perímetro de un sector circular. Polígonos regulares e irregulares.**			
Unidad 5: Utilicemos las fracciones. Conversión entre las fracciones y números decimales. Adición y sustracción de fracciones heterogéneas y números mixtos.	Problema 25, Problema 26, Problema 34, Problema 41.	Operaciones básicas, Sumar, Sumar y multiplicar, Operaciones básicas	Descomposición del problema
Unidad 6: Encontremos el área de cuadriláteros. Cálculo del área de rombos, romboides, trapecios y trapezoides.	Problema 54.	Definición de área	Descomposición del problema
Unidad 7: Tracemos figuras Traslación de figuras en un plano. Ejes de simetría y figuras simétricas con respecto a un eje. Vértices y lados correspondientes en una figura simétrica.	Problema 35, Problema 36, Problema 37, Problema 38, Problema 39.	Rotación, Simetría, Traslación, Ejes de simetría, Rotación.	Ensayo-Error
Unidad 8: Interpretemos datos. Tablas de doble entrada. Gráficas de líneas simples y dobles. Moda y mediana. Sucesos posibles, imposibles y seguros.	Problema 22, Problema 40, Problema 43, Problema 45, Problema 47.	Mayor que y menor que, Arreglos, Combinaciones, Frecuencia de datos, Operaciones básicas	Descomposición del problema, Ensayo-Erros
Unidad 9: Encontremos volúmenes. Paralelismo y perpendicularidad entre aristas y entre caras de un prisma rectangular. Patrones de prisma y pirámides. Cálculo del volumen de un prisma y de una pirámide. Volumen de	Problema 12.	Definición de rectas diagonales perpendiculares y paralelas	Descomposición del problema

Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
prismas. Relación entre volumen y capacidad.			
Unidad 10: Utilicemos otras medidas. Unidades de longitud del sistema inglés, equivalencias. Unidades métricas de pesos. Conversión entre monedas centroamericanas.	Problema 20.	Operaciones básicas	Descomposición del problema

Problemas para el Programa de Sexto Grado

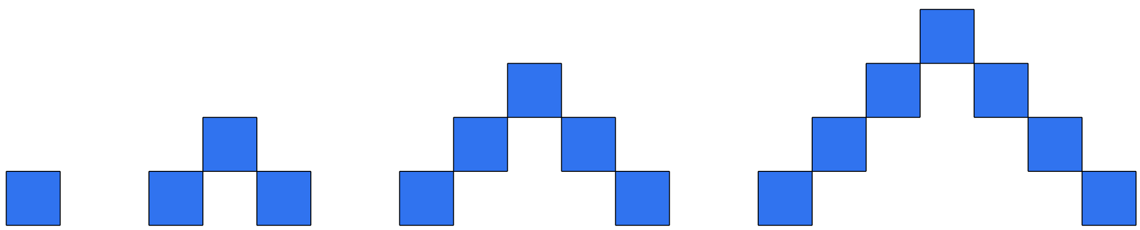
Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
Unidad 1: Operemos con fracciones. Conversión entre fracciones y números decimales. Multiplicación y división de fracciones, números mixtos, números naturales y números decimales. Combinación de las 4 operaciones básicas utilizando fracciones, números naturales, números decimales y números mixtos, siguiendo el orden de prioridad de operaciones .	Problema 9, Problema 25, Problema 26, Problema 27, Problema 28, Problema 31, Problema 32.	Simplificación, Proporcionalidad, Números mixtos, Fracción equivalentes, Interpretación geométrica, Fracción homogénea, Proporcionalidad	Descomposición del problema
Unidad 2: Tracemos figuras. Suma de los ángulos internos de un polígono regular. Simetría axial, rotacional con respecto a un eje y rotacional entre sí. Trazos y traslaciones de figuras en un plano.	Problema 35, Problema 36, Problema 37, Problema 38, Problema 39.	Rotación, Simetría, Traslación, Ejes de simetría, Rotación de una figura.	Ensayo-Error
Unidad 3: Identifiquemos razones. Razones geométricas y proporciones en la resolución de problemas. Cálculo de porcentajes a partir de las proporciones.	Problema 28, Problema 29, Problema 30, Problema 31, Propiedad 34.	Equivalencia, Definición de porcentaje, Proporcionalidad, Suma de fracciones, Propiedad asociativa	Descomposición del problema
Unidad 4: Experimentemos jugando. Experimentos aleatorios, diagrama de árbol, sucesos: posibles, imposibles, favorables; cálculo de la probabilidad de ocurrencia.	Problema 22, Problema 40, Problema 43, Problema 55.	Mayor y menor que, Combinaciones, Combinaciones, Múltiplos y divisores	Ensayo-Error
Unidad 5: Calculemos áreas. Cálculo del área de un polígono regular, de un círculo y de un sector circular.	Problema 54.	Definición de área	Descomposición del problema
Unidad 6: Representemos datos en varias gráficas. Gráficos rectangulares y circulare. Selección del gráfico adecuado para representar un tipo de datos.	Problema 19.	Ordenamiento de datos en gráficas	Descomposición del problema

Temas	Problema	Presaberes	Estrategias
Unidad 8: Estudiemos proporcionalidades. Proporcionalidad directa e inversa entre situaciones y cantidades. Regla de tres.	Problema 25, Problema 33, Problema 42.	Operaciones con fracciones, Definición de porcentaje, Residuos	Descomposición del problema
Unidad 9: Utilicemos otras medidas. La vara como medida de longitud. Conversiones entre varas, metros y centímetros. Conversión de libras kg y viceversa. Conversión de onzas a gramos y viceversa.	Problema 19.	Operaciones básicas	Descomposición del problema

Soluciones

Problema 1

Dada la siguiente sucesión de mosaicos



Mosaico 1 **Mosaico 2** **Mosaico 3** **Mosaico 4**

Si la cantidad de mosaicos que forman cada figura continúa aumentando con la misma lógica:

¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 10?

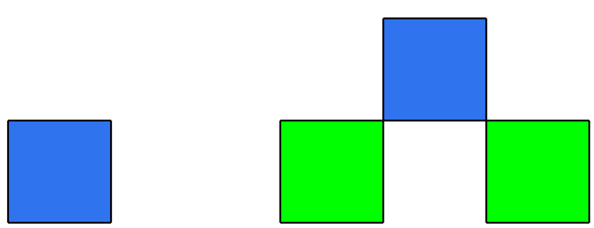
¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 20?

¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 50?

Encontrar el patrón de recurrencia y la expresión general que describe la cantidad de cuadros que tienen todos los mosaicos así construidos. Es decir, su modelo matemático.

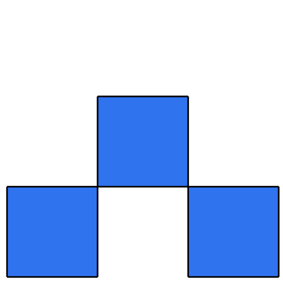
Solución 1

Observemos que cada mosaico puede construirse a partir del mosaico anterior. Por ejemplo:

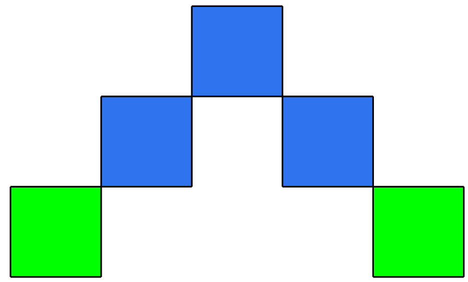


Mosaico 1 **Mosaico 2**

El segundo mosaico puede formarse a partir del primero, agregándole dos cuadros adicionales. De esta forma, nótese que el segundo mosaico debe tener $1 + 2 = 3$ cuadritos. Estos otros cuadros están marcados en verde en la figura.

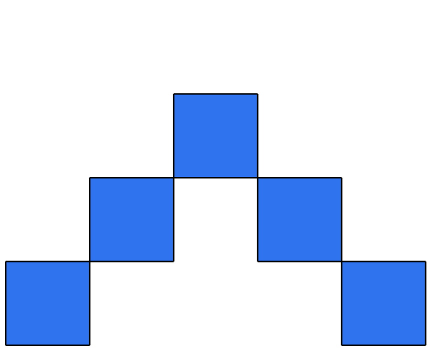


Mosaico 2

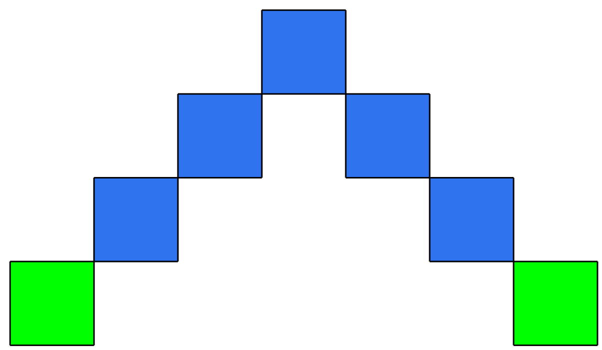


Mosaico 3

Observemos que este mismo patrón se reproduce en los siguientes mosaicos. El mosaico 3 incluye al mosaico dos y se agregan dos cuadros más, señalados con color verde, totalizando $3 + 2 = 5$ cuadros.



Mosaico 3



Mosaico 4

El mosaico cuatro incluye al mosaico 3, más dos cuadros adicionales marcados en verde. Este mosaico totalizará $5 + 2 = 7$ cuadros. Siguiendo este patrón, podemos obtener la cantidad de cuadro de colores de los siguientes mosaicos. Dado que el primer mosaico tiene un sólo cuadro, que es un número impar, cada vez que se le agregue dos resultará otro número impar.

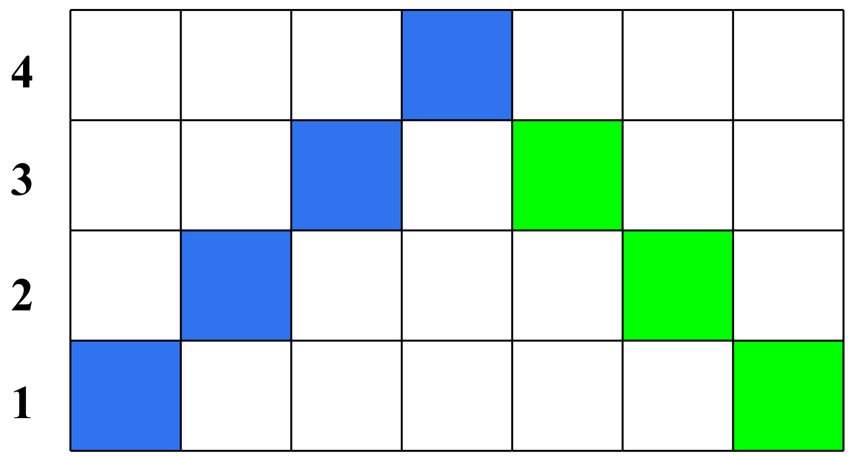
Por lo tanto, cada mosaico tendrá un número impar de cuadros azules y, dado que comenzamos con un cuadro para el primer mosaico, el número de cuadros del mosaico n será igual al n-ésimo número impar. En términos generales, podemos decir entonces que el número de cuadros del n-ésimo mosaico será $2(n - 1) + 1$.

Podemos verificar que esta propiedad se cumple para algunos valores. Para $n = 1$, tenemos que $2(n - 1) + 1 = 2(1 - 1) + 1 = 2(0) + 1 = 1$, que es el primer número entero impar; para $n = 2$, tenemos que $2(n - 1) + 1 = 2(2 - 1) + 1 = 2(1) + 1 = 3$, que es el segundo impar; para $n = 3$, tenemos que $2(n - 1) + 1 = 2(3 - 1) + 1 = 2(2) + 1 = 5$, que es el tercer impar y así sucesivamente.

Dado que el número de cuadros del mosaico n coincide con el n-ésimo impar, los cuadros del décimo mosaico serán $2(9)+1=19$. El número de cuadros del mosaico número veinte, será $2(19)+1=39$. El quincuagésimo mosaico tendrá $2(49)+1=99$ cuadros.

Solución 2

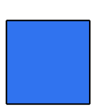
Construiremos los mosaicos en una cuadrícula donde cada fila de cuadros coincida con una fila de la cuadrícula, como se muestra en la figura.



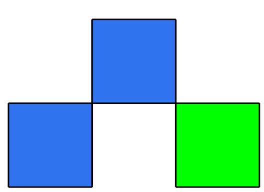
Mosaico 4

Observemos que si comenzamos a construir el mosaico de izquierda a derecha, conforme subimos, colocando cuadros azules, de la fila uno a la cuatro, siempre agregaremos un cuadro de colores. Al llegar a la cuarta columna, habremos agregado en total cuatro cuadrados de color. Luego, al bajar de fila en fila, agregaremos un cuadro a las filas de la tres a la uno. Éstos se muestran marcados en verde. Observemos que no agregamos otro cuadro a la fila número cuatro. Así, para formar el cuarto mosaico, habremos agregado $4+3=7$ cuadros.

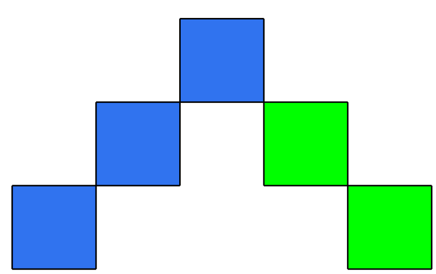
Es decir, que el número de cuadros resulta ser igual a la posición del mosaico en la sucesión (4 en este caso), más la posición disminuida en uno. Observemos que este patrón se repetirá en los demás mosaicos. Por ejemplo:



Mosaico 1



Mosaico 2



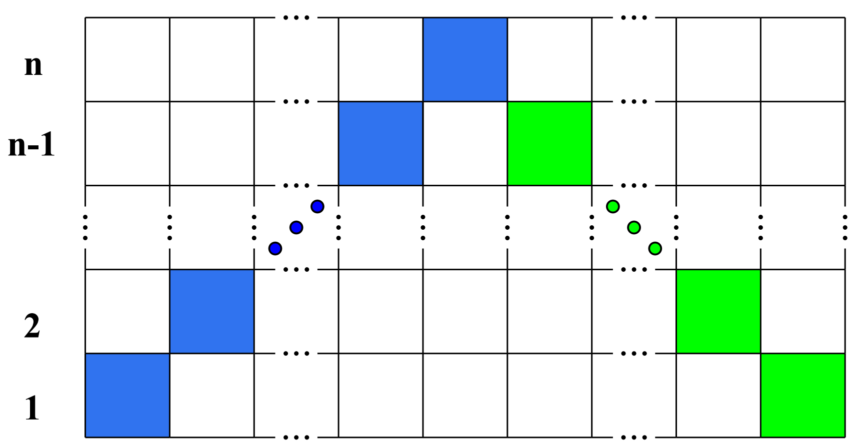
Mosaico 3

En la siguiente cuadrícula podemos ver el número de figura comparado con su número de cuadros:

Número de Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**10**	**...**	**20**	**...**	**50**
Número de Cuadros	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**...**	**?**	**...**	**?**	**...**	**?**

Observamos, con base a la tabla, que el patrón cumple para los mosaicos hasta el quinto: Para el primer mosaico, la cantidad de cuadros será 1+0 = 1; para el segundo mosaico será 2+1 = 3; para el tercero 3+2 = 5; para el cuarto mosaico 4+3 = 7; y para el quinto, la cantidad será 5+4 = 9.

Generalizando el razonamiento anterior, para el mosaico n, el número de cuadros que formarán el n-ésimo mosaico serán $n + (n - 1)$, como se puede apreciar en la figura siguiente:



Mosaico n

Esto lo expresaremos de la siguiente forma: $n + (n - 1) = \#\text{ de cuadros } del\ mosaico\ n$.
Ahora resolvamos las interrogantes planteadas por el problema: ¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 10?

De acuerdo con lo discutido anteriormente, para calcular la cantidad de cuadros del décimo mosaico, tendremos:

$$\underbrace{\mathbf{10}}_{\text{Posición}} + \underbrace{\mathbf{9}}_{\text{Posición-1}} = \underbrace{\mathbf{19}}_{\text{Cantidad de Cuadros}}$$

Entonces, el décimo mosaico tendrá 19 cuadros.

¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 20?

20 + 19 = 39 cuadros.

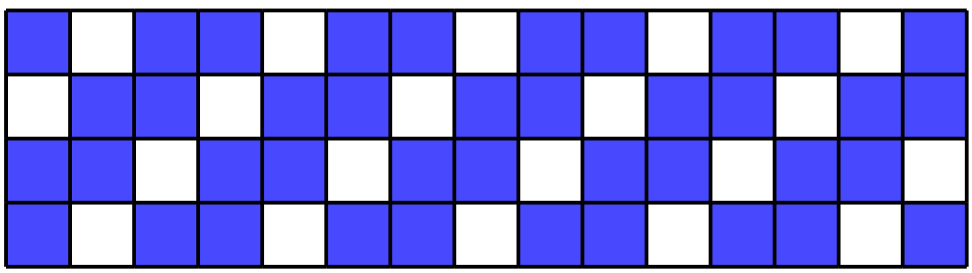
¿Cuántos cuadros azules tendrá el mosaico 50?

50 + 49 = 99 cuadros.

Su modelo es: 2n – 1 = # de cuadros del mosaico n.

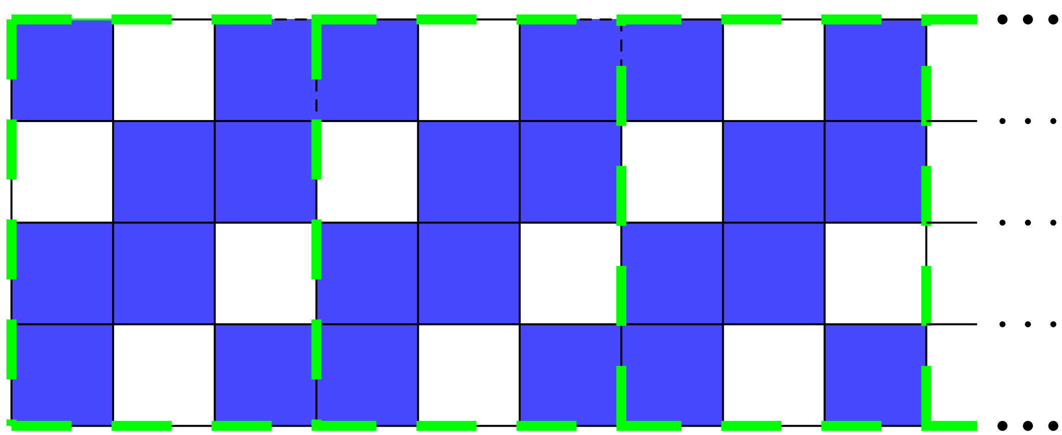
Problema 2

Un tablero de 4 filas y 503 columnas se colorea de azul y blanco según el patrón mostrado en la figura. Del total de 2012 cuadros en el tablero, ¿cuántos cuadros estarán pintados de azul?



Solución

Observemos cómo el patrón de recurrencia se establece. Este incrementa 8 cuadros azules cada 3 columnas. En la siguiente figura aparecen estas repeticiones marcadas en verde:



Si dividimos las 503 columnas del tablero completo, entre las 3 de cada repetición del patrón, observamos que este se repite un total de 167 veces y que, además, sobran 2 columnas.

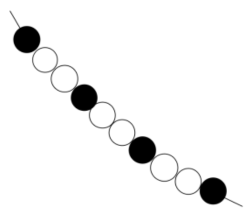
Las últimas dos columnas que falta tomar en cuenta, son las dos primeras de la siguiente repetición del patrón. La primera, tendrá 3 cuadros azules; y la segunda 2, cuadros azules. Es decir, que en estas dos columnas habrá 5 cuadros azules.

Ahora necesitamos saber cuántos cuadros azules hay en el tablero. Para calcular los cuadros azules de las primeas 167 repeticiones del patrón, multiplicamos 167 por 8 cuadros que hay en cada repetición: $167\times 8 = 1336$.

A este resultado, le sumamos los 5 cuadros azules de las últimas dos columnas. En total, contamos $1336 + 5 = 1341$ cuadros de color azul.

Problema 3

En el collar dibujado se combinan dos colores, y a su patrón de formación lo podemos expresar como "negra-blanca-blanca, negra-blanca-blanca, negra-blanca-blanca…", o en modo más abreviado: NBBNBBNBBNBB… donde N significa negra y B blanca.

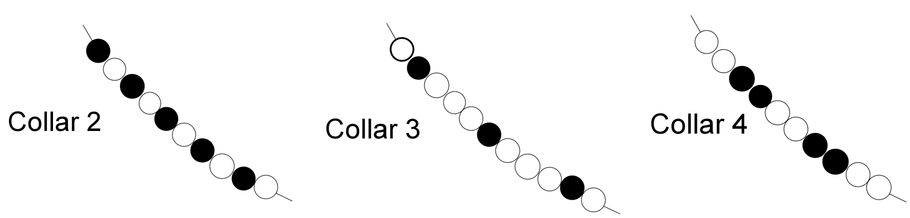


Fabricaremos tres collares diferentes de 100 bolitas. En cada caso propuesto se debe seguir un patrón que deberá repetirse a lo mucho cada 4 bolitas. Para cada collar se cuenta con 100 bolitas negras y 100 bolitas blancas. Los collares deben contener ambos colores.

a) ¿Cuál es el patrón correspondiente a cada uno de los collares que ha construido?
b) ¿Cuál es el color que le corresponderá a la bolita 50 de cada uno de los collares construidos anteriormente? ¿Y la bolita 100 qué color tendrá?

Solución

Con estos colores podemos construir los collares que se muestran a continuación. La lectora o el lector o la lectora puede construir collares diferentes de acuerdo a su creatividad.



El patrón que corresponde a cada uno de ellos se describe en la tabla a continuación.

COLLAR	PATRÓN
2	NBNBNBNBNBB…
3	BNBBBNBBBNB…
4	BBNNBBNNBBN…

Ahora, busquemos los colores de las bolitas números 50 y 100 de cada uno de los collares.

En el primer collar, el patrón se repite cada 3 bolitas. Este es el collar provisto por el problema. Los siguientes, son los collares elaborados por la lectora o el lector. Por lo tanto, se divide la posición de la bolita entre 3, por medio del residuo podrá conocer el color de la bolita.

Lugar	División	Residuo	Color
1	1/3	1	N
2	2/3	2	B
3	3/3	0	B
4	4/3	1	N
…	…	…	…
50	50/3	2	B
…	…	…	…
100	100/3	1	N

Observemos cómo en los casos en que el residuo de dividir por tres resulta 2 o 0, la bolita será de color blanco. Mientras que si el residuo es 1, será de color negro. Dado que el residuo de dividir 50 por tres es 2, esta bolita será de color blanco. Por el contrario, dado que la división de 100 por tres da como residuo 1, el color de la centésima bolita será negra.

En el segundo collar, el patrón se repite cada 2 bolitas. Esto indica que el color de las bolitas está relacionado con el residuo de dividir la posición de la bolita por 2. En la tabla a continuación se muestra esta relación:

Lugar	División	Residuo	Color
1	1/2	1	N

Lugar	División	Residuo	Color
2	2/2	0	B
3	3/2	1	N
4	4/2	0	B
…	…	…	…
50	50/2	0	B
…	…	…	…
100	100/2	0	B

Observamos que cuando el residuo es 0, la bolita será de color blanco; mientras que si el residuo es 1, el color será negro. 50 y 100 son ambos divisible por 2, por lo tanto su residuo, al ser dividido por dos, es 0. Esto indica que ambas serán de color blanco.

En el tercer collar, el patrón se repite cada 4 bolitas, por lo tanto los colores de las bolitas estarán relacionados con los residuos de dividir por 4 las posiciones, como se muestra:

Lugar	División	Residuo	Color
1	1/4	1	B
2	2/4	2	N
3	3/4	3	B
4	4/4	0	B
…	…	…	…
50	50/4	2	N
…	…	…	…
100	100/4	0	B

Observemos que cuando el residuo sea 2, las bolitas serán de color negro. En los demás casos, serán blancas. 50 tiene por residuo 2 al ser dividido por 4. Por lo tanto, será de color negro. 100 resulta en residuo 0 al dividirse por 4. Por lo tanto, será de color blanco.

Examinemos el cuarto collar. En este, el patrón se repite cada 4 bolitas; por lo tanto, si dividimos la posición que ocupa una bolita entre 4, el residuo indicará el color.

Lugar	División	Residuo	Color
1	1/4	1	B
2	2/4	2	B
3	3/4	3	N
4	4/4	0	N
…	…	…	…
50	50/4	2	B
…	…	…	…
100	100/4	0	N

Observemos que cuando el residuo es 1 o 2, la bolita será blanca. Cuando el residuo sea 3 o 0, la bolita será negra. Por lo tanto, la bolita 50 será blanca y la 100 será negra.

Nota: Este problema tiene muchas variantes. Al resolver este problema, se pueden hacer muchos patrones diferentes para los collares. Los presentados son sólo ejemplos de los que se puede hacer en este tipo de propuestas.

Problema 4

¿Qué patrón sigue la siguiente tira de números? ¿Podrías completar la información faltante?

2	**9**	**16**	**23**			

Si continuara la tira, ¿estará el número 100? ¿Cómo lo sabe?

¿Qué ocurre con el número 198? ¿Con el número 200?

Escriba un número mayor que 2014 que nunca aparecerá en esta tira. ¿Cómo lo sabe con seguridad?

¿Cuál es el modelo matemático de la sucesión de números?

Solución

El número 100 está en la tira. Los números de la tira aumentan en 7 cada vez. Busquemos el múltiplo de 7 más cercano a 100. Éste es 98, y como la secuencia inicia en 2, 98 +2 = 100, sí está en la secuencia.

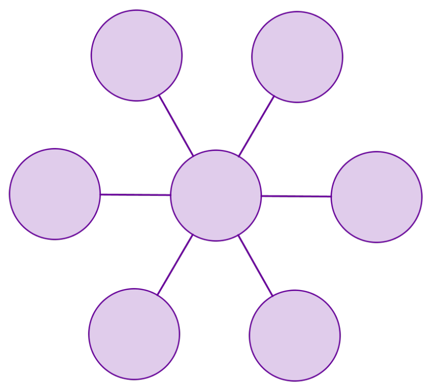
Siguiendo la misma lógica, 198 aparecerá en la tira porque 196+2= 198, y 7×28 = 196. El siguiente es 203 y es claro que 200 no está en la secuencia.

Escogemos el número 5915, mayor que 2014, para ver si se encuentra en la secuencia. Este número no aparecerá en la tira, ya que es un múltiplo de 7 y en la secuencia sólo aparecen los múltiplos de 7 aumentados en dos.

El modelo debe ser un múltiplo de 7, aumentado en dos. Es decir, que la posición n de la secuencia le corresponde al número $7n + 2$ con $n = 0,1,2,3\ldots$

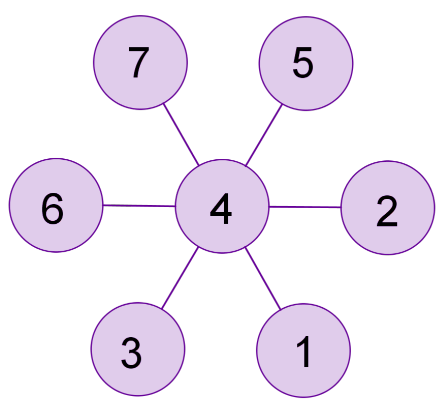
Problema 5

Los dígitos entre 1 y 7, ambos inclusive, se distribuyen en la figura que se muestra (una en cada círculo), de manera que los tres números sobre una misma línea sumen siempre 12. ¿Qué número debe ir en el círculo central?



Solución

Si 3 cifras deben sumar 12 dividimos : $12 \div 3 = 4$. Probaremos con que 4 sea la cifra central. Luego, procedemos a ubicar la cifra mayor y su complemento. $7 + 4 + 1 = 12$; $6 + 4 + 2 = 12$; $5 + 4 + 3 = 12$. Por tanto el resultado será:



Problema 6

Se ordenan los números naturales como se muestra en la figura. ¿Cuántos números habrá en total hasta la fila 100?

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

Solución

Observemos que la cantidad de números en una fila es igual al número de la fila. Esto se muestra en la siguiente figura:

Número de Fila		**Cantidad de números en la fila**
1	**1**	**1**
2	**2 3**	**2**
3	**4 5 6**	**3**
4	**7 8 9 10**	**4**

De este patrón que hemos observado, deducimos que la cantidad de números hasta la fila n es igual a la suma de los enteros desde 1 hasta n.

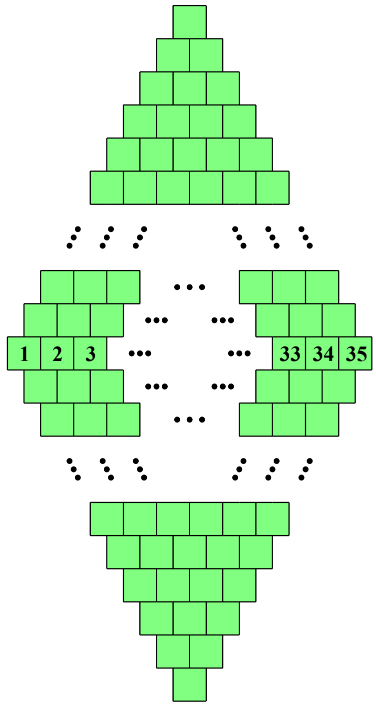
La suma de los enteros desde 1 hasta n es $\frac{n(n+1)}{2}$. Por lo tanto, para $n = 100$ tendremos que:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(100)(100+1)}{2} = \frac{(100)(101)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Hasta la fila 100 habrán en total 5050 números.

Problema 7

¿Cuántos cuadros habrá en la siguiente figura, si la fila más grande tiene 35 cuadros?



Solución

Notemos que, inicialmente, la cantidad de números en cada fila es igual al número que corresponde a cada fila; por ejemplo: la fila 1 contiene un cuadro, la fila 2 tiene dos cuadros, la fila 3 posee tres cuadros. Esto será así hasta la fila 35. Luego de la fila 35, las filas comienzan a decrecer en un cuadro por cada fila, como se expresa en la siguiente figura. (vea la siguente página)

Para obtener la suma total de cuadros, podemos sumar la cantidad de cuadros de cada una de las filas. Observemos que las primeras 34 filas sumarán la misma cantidad de cuadros que las últimas 34. Así que, para lograr la suma total, podemos sumar dos veces los números de 1 hasta 34 y agregarle la fila 35, que todavía no hemos considerado en la suma.

Procediendo de la forma descrita, tenemos que la cantidad de cuadros en la figura completa será:

$$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \cdots + 34) + 35$$

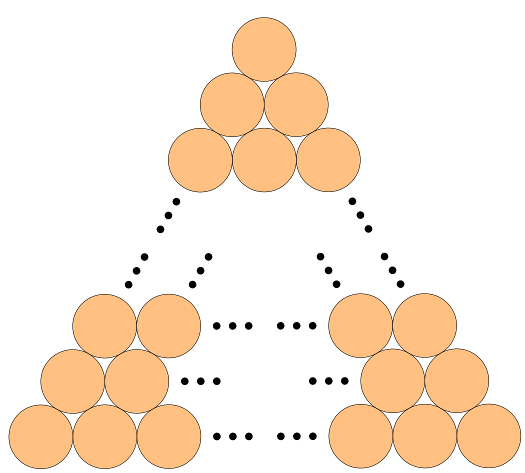
$$= 2\left(\frac{34(34+1)}{2}\right) + 35$$

$$= 1190 + 35 = 1225$$

Número de Fila		Cuadros por Fila
1	1	1
2	1 2	2
3	1 2 3	3
4	1 2 3 4	4
5	1 2 3 4 5	5
6	1 2 3 4 5 6	6
⋮	⋰ ⋰ ⋰ ⋱ ⋱ ⋱	⋮
33	1 2 3 ··· 31 32 33	33
34	1 2 3 ··· ··· 32 33 34	34
35	1 2 3 ··· ··· 33 34 35	35
36	1 2 3 ··· ··· 32 33 34	34
37	1 2 3 ··· 31 32 33	33
⋮	⋱ ⋱ ⋱ ⋰ ⋰ ⋰	⋮
64	1 2 3 4 5 6	6
65	1 2 3 4 5	5
66	1 2 3 4	4
67	1 2 3	3
68	1 2	2
69	1	1

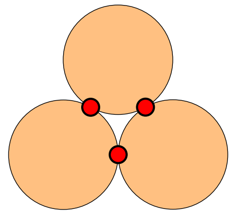
Problema 8

Hallar el total de puntos de contacto que hay determinados en la siguiente figura, que tiene 349 filas de círculos:

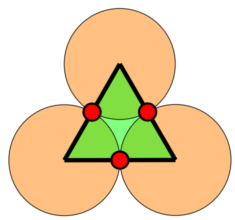


Solución

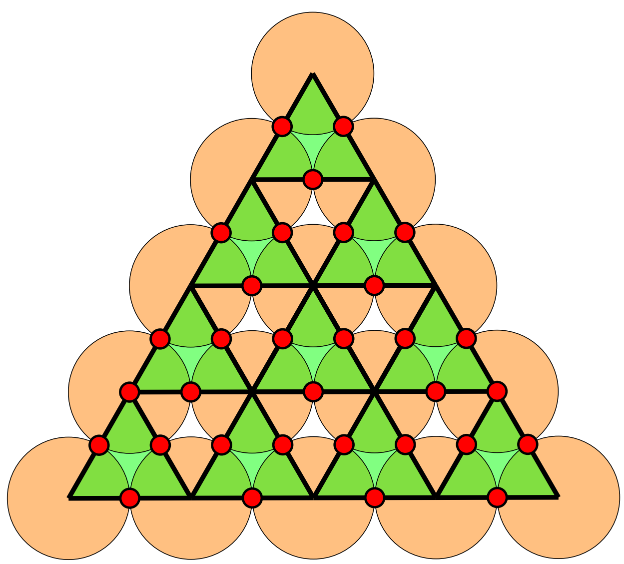
Observemos que entre cada tres de los círculos adyacentes en la figura, estos tendrán tres puntos en común entre sí.



Para cada tres círculos podemos construir, además, un triángulo; de modo que los puntos comunes entre los círculos pertenezcan a los lados del triángulo, de la siguiente manera:



Para la figura completa, podemos hacer esta construcción para cada tres círculos adyacentes de forma análoga al ejemplo que se muestra a continuación:



Al realizar la construcción auxiliar como se ha descrito anteriormente, cada lado de los triángulos coincide con uno de los puntos comunes entre dos de los círculos. Por lo tanto, el conteo de los lados de los triángulos, en la construcción auxiliar, es equivalente al conteo de los puntos entre los círculos.

Para una figura con una sola fila, y por tanto un solo círculo, habría cero puntos de contacto. Además, todavía no se puede construir uno de los triángulos auxiliares, pues se requerirían como mínimo tres puntos comunes para ello.

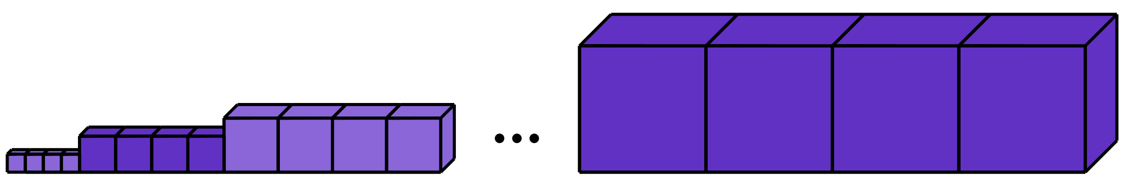
Para una figura de más filas, en la segunda tendremos tres triángulos con tres puntos de contacto entre ellos y podemos construir un triángulo auxiliar. Con la tercera fila podemos construir dos triángulos auxiliares.

Con la cuarta, podremos construir tres y así sucesivamente. De modo que si queremos contar la cantidad de triángulos hasta la fila n, deberemos sumar los enteros desde 1 hasta $n-1$.

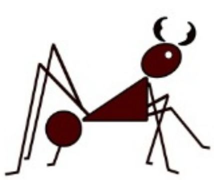
Por lo tanto, la cantidad de triángulos para una figura construida con n filas de círculos será: $\frac{(n-1)(n)}{2}$. Pero cada uno de los lados de estos triángulos coincide con un punto en común entre dos círculos. Así, el total de puntos en común para una construcción de 349 filas será: $3\frac{(349-1)(349)}{2} = 182178$

Problema 9

Carlos abrió un taller de dulces de mazapán en su colonia. La forma de estos dulces es de cubos perfectos. Carlos decide hacer dulces de todos los tamaños que sus clientes puedan desear. Por ello, hace dulces de 1, 2, 3… 32 centímetros de arista. Los dulces son envueltos en paquetes de cuatro dulces colocados en línea recta. Carlos coloca los paquetes de dulces de menor a mayor tamaño en un estante, como se muestra en la figura.



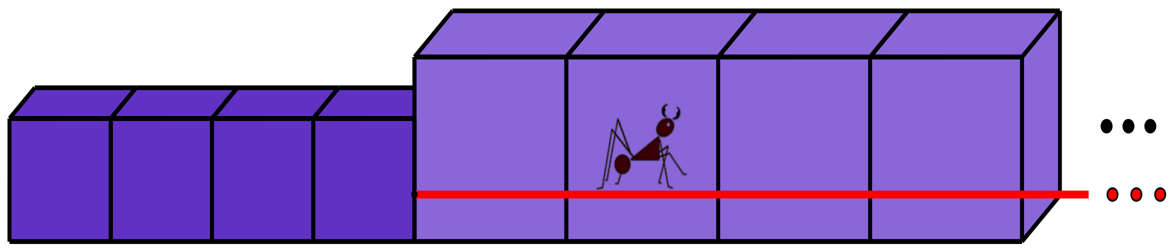
Una hormiga queda un día atrapada justo al final del primer paquete de dulces. La hormiga, muy golosa y dispuesta a hacerse un festín con los dulces de Carlos, decide atravesar los dulces en línea recta hacia los dulces de mayor tamaño. La hormiga logró, de esta forma, atravesar el primer dulce del último paquete cuando fue descubierta y, para su disgusto, fue retirada de los dulces.



Considerando que el paquete de los dulces tiene un grosor de $\frac{1}{31}$ centímetros, ¿Qué distancia recorrió la hormiga comiendo a través de los paquetes de dulces de mazapán?

Solución

La hormiga comienza su recorrido en el primer paquete. Sin embargo, no come de estos dulces debido a que comienza en el final de dicho paquete y se dirige hacia los de mayor tamaño. Es decir, la hormiga comienza su camino en la trayectoria marcada en rojo:

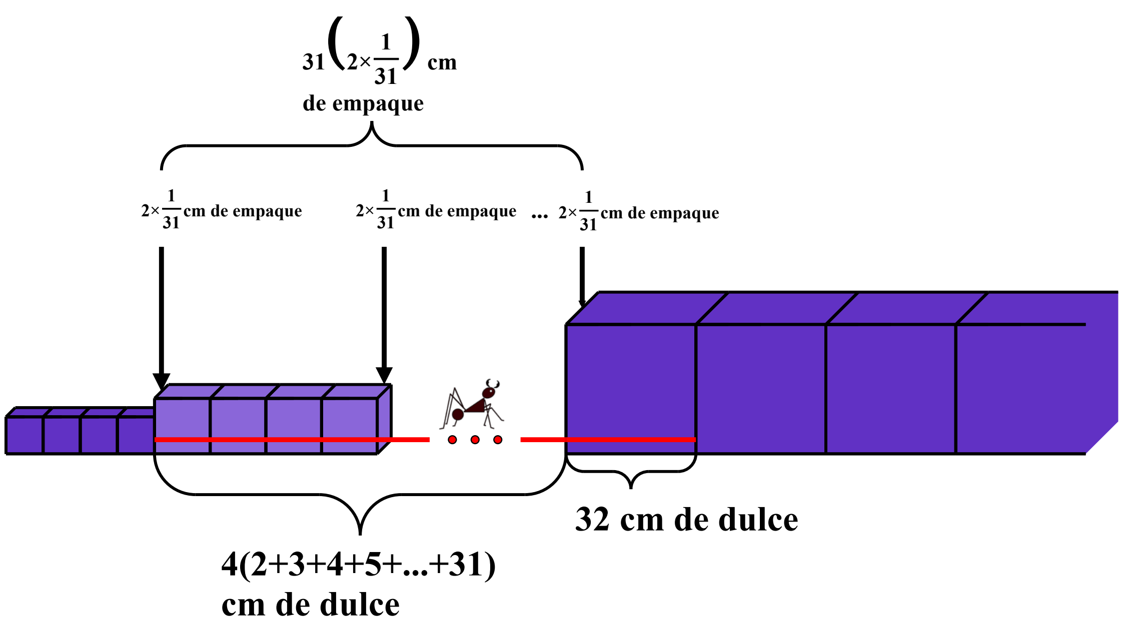


Observemos, sin embargo, que al iniciar su recorrido la hormiga sí recorre el empaque del primer paquete y el extremo inicial del segundo.

Así, la hormiga recorrerá completamente todos los dulces de 2, 3, 4 hasta 31 centímetros de espesor. La hormiga rompe, además, todos los empaques en su recorrido.

Esta distancia será en total $4(2+\cdots+31) = 4\left(\frac{(31+2)(31-1)}{2}\right) = 4(495) = 1980\,cm$. Además, la hormiga logra atravesar un dulce de 32 cm antes de ser descubierta.

Por lo tanto, atraviesa $1980 + 32 = 2012$ centímetros de dulce de mazapán.



Pero la hormiga también debe atravesar los empaques para lograr esa trayectoria. En total, atraviesa 31 paredes de dos empaques, cada una en la frontera de los paquetes de dulce. Dado que cada uno de los paquetes mide $\frac{1}{31}$ centímetros, en total recorre $2\times31\times\frac{1}{31} = 2\,cm$.

Por lo tanto, la hormiga en total recorre 2014 centímetros hasta llegar al punto donde, para su disgusto, es descubierta y retirada de los dulces.

Problema 10

Maritza, Oscar, Carlos, Félix y Ulises están sentados formando un círculo, en el orden indicado. Maritza dice el número 63, Oscar el 62, Carlos el 61, Félix el 60, Ulises el 59, y así sucesivamente. ¿Quién dice el número 1?

Solución

Al dividir un número entre 5, sus residuos pueden ser 0,1,2,3,4. Ubicaremos a éstos en la siguiente tabla. A los conjuntos de números de cada columna, les llamamos clases residuales:

0	**1**	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**
15	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**
...	**...**	**...**	**...**	**...**
55	**56**	**57**	**58**	**59**
60	**61**	**62**	**63**	**64**

Cada columna de números tiene un patrón específico para las terminaciones de los números en ella presentes. Así por ejemplo, los números de la clase residual que contiene al 1, en la tabla anterior, terminan siempre en 1 o 6. Los números de la clase residual que contiene al 3, siempre terminan en 3 u 8.

Por ejemplo, Maritza menciona los números con terminaciones 3 y 8. Ella dice: “63” en su primer turno, “58” en su segundo turno, “53” en su tercer turno, “48” en su cuarto turno y así sucesivamente. Puede verificarse que hay un patrón de este tipo para los números que dice cada persona. En la siguiente tabla observaremos este comportamiento:

Nombre	Número mencionado	Terminación de número
Maritza	63-58-53-48 … 8-3	3 y 8
Oscar	62-57-52-47 … 7-2	2 y 7
Carlos	61-56-51-46 … 6-1	1 y 6
Félix	60-55-50-45 … 5	0 y 5
Ulises	59-54-49-44 … 4	9 y 4

Carlos es quien dice los números terminados en 1 y 6. Por lo tanto, él dirá el número 1.

Problema 11

¿Cuál es el resto de dividir el producto 2010×2011×2012 entre 12? Argumente sin realizar la operación.

Solución

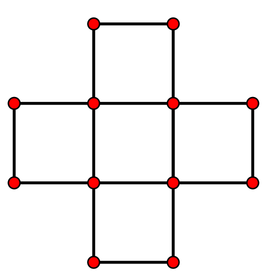
Sabemos que un número es divisible por 12, si es divisible por 4 y por 3 porque $4 \times 3 = 12$. Ahora analicemos si el producto 2010×2011×2012 será también divisible por 4 y 3; y por lo tanto, divisible por 12.

Observemos que 2010 es divisible por 3, ya que utilizando el criterio de divisibilidad por 3, al sumar sus dígitos 2+0+1+0= 3. Los últimos dígitos de 2012 nos indican, por el criterio de divisibilidad por 4, que es múltiplo de 4.

Por lo tanto, el producto 2010×2011×2012 será un múltiplo, tanto de 3 como de 4. Así, el resto o residuo de 2010×2011×2012, al ser dividido por 12 es 0.

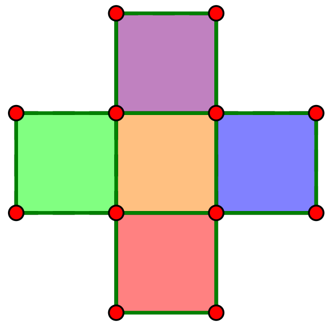
Problema 12

En el siguiente gráfico se muestran cinco cuadrados, en los que se han pintado de rojo sus 12 vértices (algunos vértices pertenecen a varios cuadrados). ¿Cuántos cuadrados tienen todos sus vértices de color rojo?

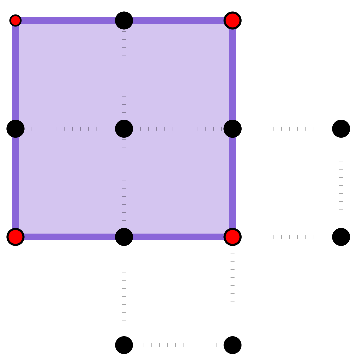


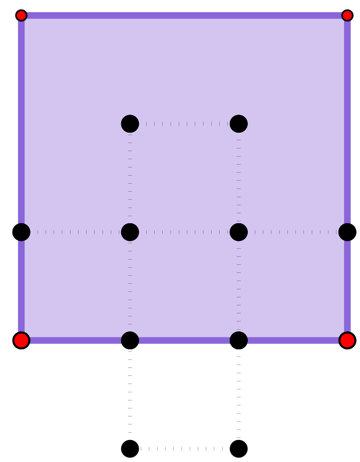
Solución

Primero, obtenemos los 5 cuadros que ya están formados por las líneas presentes en el dibujo. En la figura que viene a continuación aparecen señalados en diferentes colores.

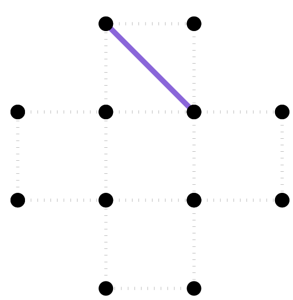


Observe que son las únicas opciones que se tienen para obtener cuadrados con lados paralelos a las líneas ya provistas. Los cuadrados con lados más largos necesitarían tener vértices diferentes de los permitidos (en rojo). Por ejemplo, para cuadrados con lado igual al doble y triple de los anteriores tenemos:

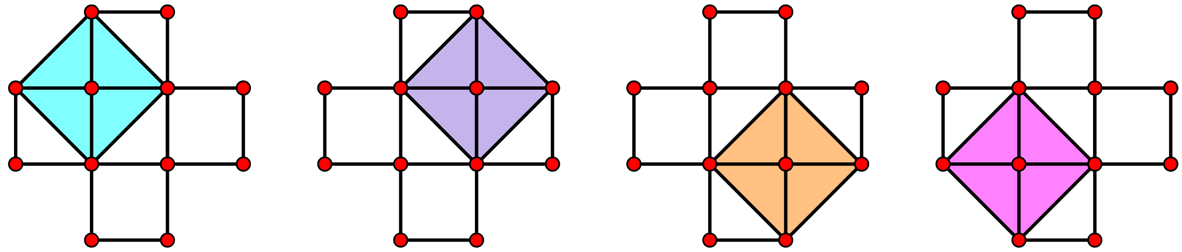




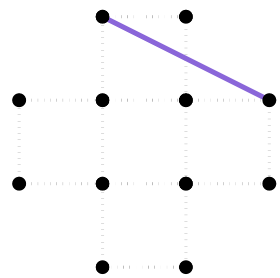
Ahora, probaremos las diferentes posibilidades para tomar cuadrados con lados no paralelos a las líneas provistas. Comencemos tomando como lado la diagonal de uno de los cuadrados anteriores. Es decir:



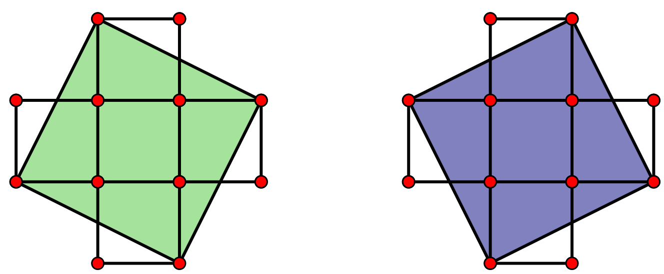
Las diferentes posibilidades para formar cuadrados se muestran a continuación:



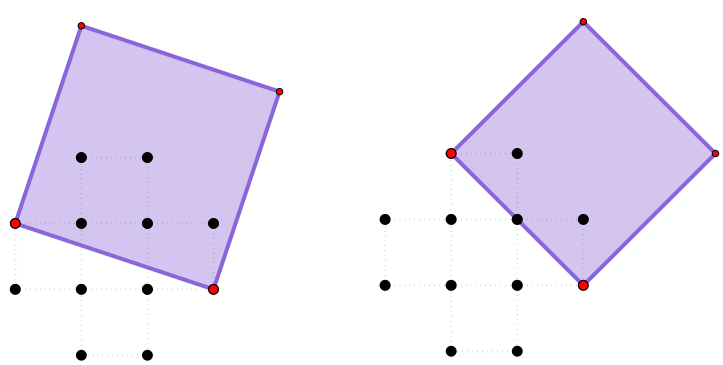
También podemos obtener dos cuadrados más, tomando como lado la diagonal del rectángulo formado por dos de los cuadrados adyacentes de los provistos originalmente. Es decir:



De esta forma podemos obtener los siguientes cuadrados:



Observemos que tomando otros posibles lados como, por ejemplo, la diagonal del rectángulo formado por tres cuadrados adyacentes o los que tienen dos diagonales como lado, requieren tener vértices fuera de los permitidos. Por ejemplo, respectivamente tenemos:



En total, tendremos que con los vértices permitidos podemos formar 11 cuadrados.

Problema 13

¿Cuánto suma cada fila de un cuadrado mágico de magnitud tres? Un cuadrado mágico de magnitud tres se puede entender como una cuadrícula de 3×3 en la cual se ubican los números del 1 al 9. Estos deben estar colocados de tal forma que la suma de los números de las casillas (horizontales, verticales y diagonales) den el mismo resultado.

Solución

Si sumamos las tres filas de la cuadrícula, habremos incluido en la suma todos los números de la cuadrícula. Sabemos que estos son los números del 1 al 9. Por lo tanto, esta suma será $1+2+\cdots+9=\frac{(9+1)9}{2}=45$. Pero dado que sumamos tres filas, y que la suma de los números de las filas es constante, entonces la suma de una de las filas será: $\frac{45}{3}=15$.

Podemos verificar que esto se cumple en los siguientes cuadrados mágicos de magnitud 3:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Problema 14

El 30 de febrero cumple años mi papá y se había preparado un pastel para su cumpleaños, pero al llegar a casa a preparar la fiesta el pastel había desaparecido. En mi casa hay cinco hermanos más: Melissa, Maritza, Carlos, Oscar y Félix. Mi mamá sabe que alguno o varios, son los autores de haberse comido el pastel y los interroga, he aquí sus respuestas:

Melissa: "Esto es obra de uno sólo de nosotros".

Maritza: "No, de dos de nosotros".

Carlos: "No, de tres de nosotros".

Oscar: "No, de cuatro de nosotros".

Félix: "Entre todos lo comimos".

Mi mamá sabe que los inocentes dicen la verdad, mientras que los culpables mienten. ¿Quién o quiénes son los inocentes?

Solución

Primero analizamos lo que dice Félix. La afirmación: "Entre todos nos lo comimos", no puede ser verdadera porque declara culpable a Félix. Si Félix dijese la verdad, entonces todos serían culpables, incluido Félix. Pero si Felix es culpable, hubiese mentido. Por lo tanto, Felix está mintiendo y no todos comieron el pastel.

Luego analizamos lo que dice Oscar, sabiendo que Félix es culpable. Si Oscar miente, Melissa mentiría porque ya hay dos culpables: Félix y Oscar. Maritza también mentiría, porque ya habría tres culpables: Félix, Oscar y Melissa. Con Maritza serían cuatro. Carlos también mentiría, ya que habrían cuatro culpables y él aseguró que eran tres. Con Carlos serían 5 culpables. Pero esto no puede ser cierto porque ya, con la afirmación de Félix, descubrimos que hay al menos un inocente. Por lo tanto, Oscar dice la verdad y es el único inocente.

Problema 15

¿Cuántos números como mínimo se deben borrar del siguiente tablero para lograr que, con los números que queden, se cumpla que la suma de cada fila y de cada columna es un número par?

2	0	1	4
0	2	4	1
1	5	2	0
5	1	0	2

Solución 1

Observemos los resultados de sumar cada una de las filas y columnas:

2	0	1	4	7
0	2	4	1	7
1	5	2	0	8
5	1	0	2	8
8	8	7	7	

Nótese que, de las sumas de las filas y columnas, dos filas y dos columnas resultan ser impares (marcados en verde). Para cambiar las sumas, deberemos eliminar por lo menos un impar de cada una de estas. Observemos los números impares que hay en estas filas y columnas:

2	0	1	4	7
0	2	4	1	7
1	5	2	0	8
5	1	0	2	8
8	8	7	7	

Observe que si quitamos estos dos números impares, la suma de sus respectivas filas y columnas resultará ser par. Para cada uno de estos valores eliminados, modificamos la suma de su fila y su columna. Pero no podemos lograr nuestro objetivo modificando uno sólo de los valores. Por lo tanto, como mínimo debemos eliminar estos dos valores. Si quitamos los demás números impares, el resultado de las otras filas y columnas seguirá siendo par. Sin embargo, la cantidad de números a eliminar ya no será óptima.

2	**0**		**4**	**6**
0	**2**	**4**		**6**
1	**5**	**2**	**0**	**8**
5	**1**	**0**	**2**	**8**
8	**8**	**6**	**6**	

Problema 16

Si las letras G, O, L, E y S representan números dígitos, no todos cero (no necesariamente diferentes), tales que

$$\boldsymbol{GOL \times GOL \;=\; GOLES}$$

Calcular G + O + L + E + S.

Solución

En general, cualquier número de la forma $abcde \;=\; abc00 + de = abc{\times}100 + de$

Entonces, descomponemos GOLES $= GOL \times 100 + ES$

Por ejemplo, el número 12345 , lo podemos descomponer así:

$12345 \;=\; 12300 \;+\; 45 = \;123 \times 100 \;+\; 45$

Y también el número $45{,}248 \;=\; 45{,}200 + 48 \;=\; 452{\times}100 + 48$

Pero $GOL \times GOL \;=\; GOLES \;=\; GOL \times\; 100 + \;ES \Rightarrow\; GOL \times GOL\; - GOL \times 100 = \;ES$

Entonces, $GOL\;(GOL - 100) = \;ES$.

Esto sólo será un entero positivo cuando GOL sea igual a 100. Si GOL es menor que 100, ES resultará menor que cero. Si GOL es mayor que 100, entonces ES resultaría un número de tres dígitos, pero sabemos que tiene 2. Por lo tanto, GOL debe ser 100. Y ES sólo puede ser 0.

Esto sólo es posible si ES igual a 0, por tanto E = S = 0.

Ahora, podemos determinar la suma:

$$G + O + L + E + S$$

$$1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Problema 17

En la siguiente expresión aritmética, las letras distintas representan dígitos distintos:

2011 - BOL - SO - NES

¿Cuál es el menor valor posible de la operación?

Solución

Dado que BOL, SO, y NES son números decimales, el valor de cada dígito en el número depende no sólo del dígito sino de su posición. Así, la B en BOL, no vale únicamente B sino B×100.

BOL	**B×100 + O×10 + L×1**
SO	**S×10 + O×1**
NES	**N×100 + E×10 + S×1**

Entonces, podemos expresar estos números como:

Primero trabajaremos con valor posicional, y tomamos en cuenta las siguientes condiciones:

Observemos que algunos de estos valores se repiten en diferentes números (por ejemplo, la S aparece en S y NES). En fin, B y N serán multiplicados por 100, O y S por 11, E por 10 y L sólo aparece una vez.

Para minimizar el valor de la expresión 2011 – BOL – SO – NES, necesitamos maximizar el valor de BOL+SO+NES, ya que esta es la cantidad que restaremos a 2011. Para ello, daremos a los números, que adquirirán mayor valor posicional, los dígitos de mayor valor. A continuación, asignamos los valores de los dígitos de acuerdo a este criterio:

Letra	Posición	Dígito posible
B	Centenas (× 100)	9 o 8
N	Centenas (× 100)	9 o 8
O	Decenas + Unidades (× 11)	7 o 6
S	Decenas + Unidades (× 11)	7 o 6
E	Decenas (× 10)	5
L	Unidades (× 1)	4

De acuerdo a estas condiciones, sólo se pueden dar cuatro posibilidades para BOL, SO y NES. Los cuatro dan el mínimo resultado para la expresión 2011 – BOL – SO – NES

2 0 1 1	2 0 1 1	2 0 1 1	2 0 1 1
- 9 7 4	- 9 6 4	- 8 7 4	- 8 6 4
- 6 7	- 7 6	- 6 7	- 7 6
- 8 5 6	- 8 5 7	- 9 5 6	- 9 5 7
= 1 1 4	= 1 1 4	= 1 1 4	= 1 1 4

El menor valor de la operación es 114.

Problema 18

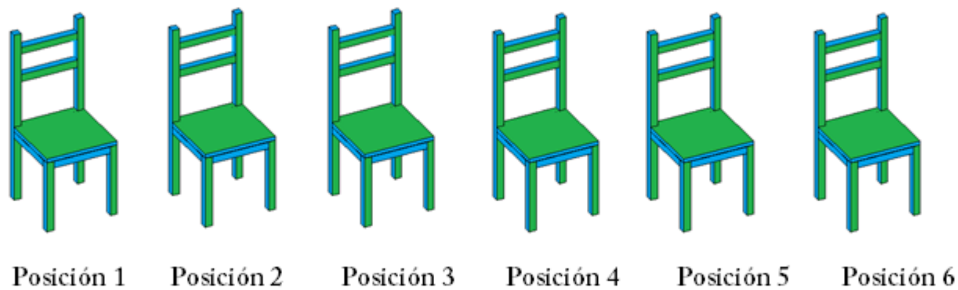
Jorge, Oscar, Adela, Carlos, Norma y Alicia se sientan en 6 sillas. Se sabe que Jorge se sienta al extremo derecho, además Carlos y Alicia se sientan al extremo izquierdo. Diga usted cuál de las alternativas siempre se cumple, sabiendo que personas del mismo género no pueden estar juntas.

a) Adela está junto a Jorge.
b) Oscar está al extremo izquierdo.
c) Norma está junto y a la izquierda de Jorge.
d) Adela está junto a Oscar.
e) Norma está a la izquierda de Oscar.

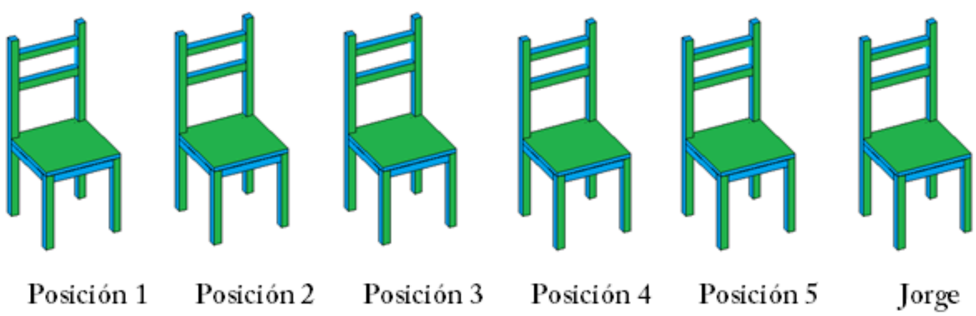
Solución

Lo primero que haremos es separar por géneros a las 6 personas. Debido a que una condición a cumplir es que personas del mismo género no pueden estar juntas, las clasificamos en generos, hombres y mujeres.

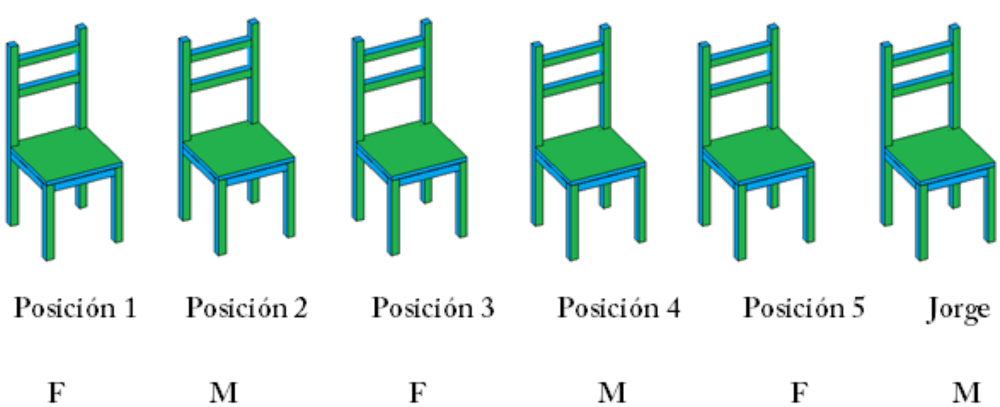
Luego, procedemos a determinar las 6 ubicaciones siguiendo algunas de las pistas que se proporcionan.



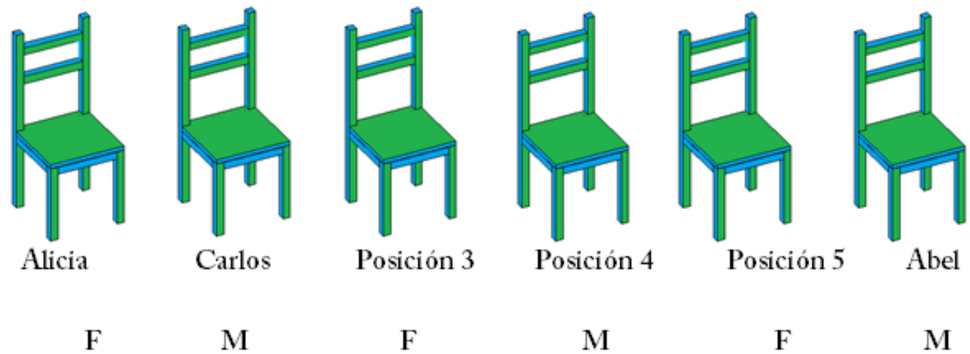
Se sabe que Jorge se sienta al extremo derecho, por lo que ubicamos a esta persona en esa posición.



Además, sabemos que Carlos y Alicia se sientan al extremo izquierdo. Sin embargo, no sabemos qué posición ocupa cada quien. Una condición es que personas del mismo género no pueden estar juntas. Dado que sabemos dónde se ubica Jorge, la distribución de hombres y mujeres debe ser la que se muestra a continuación.



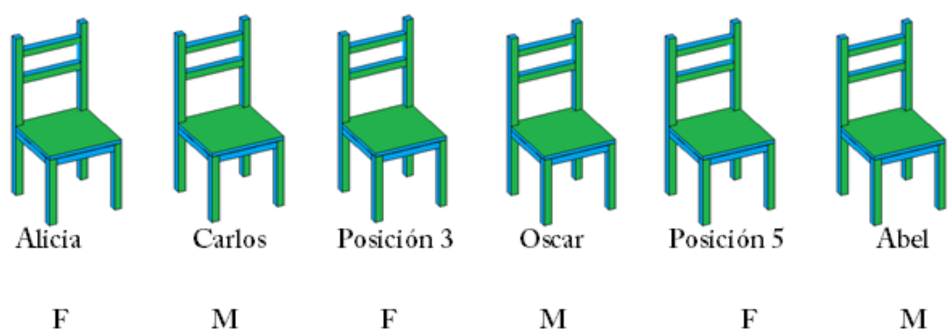
Conociendo esta distribución, podemos asignar los lugares para Carlos y Alicia. La posición del extremo izquierdo será de Alicia.



Ahora, utilizando la información anterior, trataremos de determinar cuál de las alternativas siempre se cumple:

a) Adela está junto a Jorge.Si Adela estuviera en la posición 5 estaría junto a Jorge, pero si está en la posición 3 no estaría junto a Jorge; por lo tanto, esta alternativa no siempre se cumple.

b) Oscar está al extremo izquierdo. Esta afirmación no es cierta, debido a que el extremo izquierdo ya está ocupado por Alicia; por tanto, la alternativa no se cumple en ningún caso. El lugar que le corresponde a Oscar es el cuarto. Este es el único lugar disponible para colocar a otra persona del sexo masculino.



a) Norma está junto y a la izquierda de Jorge.Las únicas dos posiciones disponibles para ser ocupadas por una mujer son las posiciones 3 y 5. Si Norma estuviera en la posición 5 estaría a la izquierda de Jorge, y junto a él. Si estuviera en la posición 3, estaría a la izquierda de Jorge, pero no junto a él, por lo que esta alternativa no siempre se cumple.
b) Adela está junto a Oscar. Las únicas posiciones disponibles para colocar a Adela, por ser mujer, son las posiciones 3 y 5. Dado que Oscar estará en la posición 4, Adela siempre estará junto a Oscar, por lo que esta afirmación siempre se cumple.
c) Norma está a la izquierda de Oscar. Dado que Norma podría estar en cualquiera de las posiciones 3 o 5 y Oscar está en la posición 4, no podemos concluir que Norma estará a su izquierda. Ella podría también estar a su derecha.

Problema 19

El caracolito Frikencio decidió cambiar de casa y se marchó al huerto de Maritza, que estaba muy cercano. En este huerto abundaban sabrosas coliflores, deliciosas lechugas y las más delicadas hortalizas que un caracol de paladar refinado pudiera desear. El único problema era la presencia de un muro de separación de 20 metros de altura. Frikencio, con su casa y sus cosas a cuestas, decidió escalarlo. Cada día conseguía escalar 4 metros verticales, pero como el muro era húmedo y resbaladizo cada noche, mientras dormía, resbalaba 2 metros hacia abajo. Así, cada día recorría sólo 2 metro de su agotador viaje. ¿Cuántos días necesitó Frikencio para llegar a la mitad del muro? ¿Cuántos días tardó en llegar a 2 metros de la altura total del muro?¿Llega Frikencio de día o de noche a la máxima altura del muro?

Solución

Elaboremos un cuadro para el análisis de la respuesta a la pregunta siguiente: ¿cuántos días necesitó Frikencio para llegar a la mitad del muro?

Día	Sube	Baja	Recorrido
1	4	2	4 – 2 = 2
2	4	2	2 + 4 – 2 = 4
3	4	2	4 + 4 – 2 = 6
4	4		6 + 4 = 10

El caracol Frikencio llegó en 4 días a la mitad del muro. Para la respuesta a la pregunta: ¿cuántos días tardó para llegar a 2 metros del final? Haremos también otro cuadro. Dado que el muro tiene 20 metros, buscamos hallar el momento en que llega a los 18.

Día	Sube	Baja	Recorrido
1	4	2	4 – 2 = 2
2	4	2	2 + 4 – 2 = 4
3	4	2	4 + 4 – 2 = 6

Día	Sube	Baja	Recorrido
4	4	2	6 + 4 – 2 = 8
5	4	2	8 + 4 – 2 =10
6	4	2	10 + 4 – 2 =12
7	4	2	12 + 4 – 2 =14
8	4		14 + 4 =18

Frikencio llega en 8 días a dos metros del final y llega durante el día.

Problema 20

Si †, ✧, ⊛ son dígitos, ¿cuántos dígitos tiene la máxima suma posible para la operación que se muestra a continuación?

	7	⊛
	†	9
8	✧	6

Explique su solución y su razonamiento; diga, además, ¿cuál es el valor de la suma mínima?

Solución

Para deducir el resultado máximo, asignamos a todas las variables el valor 9, es decir que ⊛= † = ✧ = 9. Así, obtenemos que la suma máxima es:

		7	9	+
		9	9	+
	8	9	6	=
1	0	7	4	

Entonces, esta suma tiene 4 dígitos y es 1074.

Para el caso de la suma mínima, se puede deducir asignando los valores

$$\circledast = 0, \qquad \dagger = 1, \qquad ✧ = 0$$

El dígito † no puede ser 0, porque si no, el segundo sumando sería de un sólo dígito. Pero entonces, no tiene sentido que aparezca en la suma.

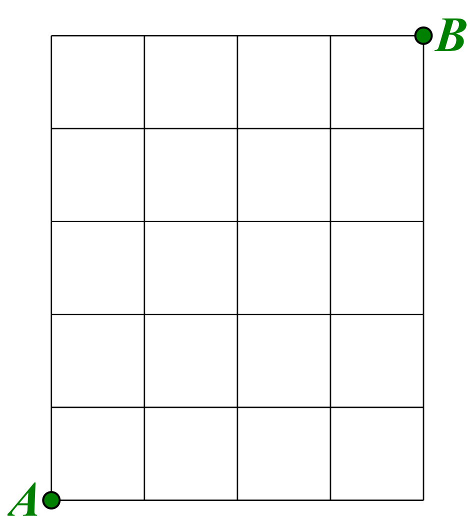
De donde:

$$\begin{array}{rrrl} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & + \\ & \mathbf{1} & \mathbf{9} & + \\ \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{6} & = \\ \hline \mathbf{8} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \end{array}$$

Por lo tanto, la mínima suma es 885, que tiene tres cifras.

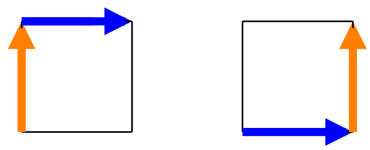
Problema 21

¿De cuántas maneras puedo llegar desde A hasta B, caminando sólo hacia la derecha o hacia arriba?

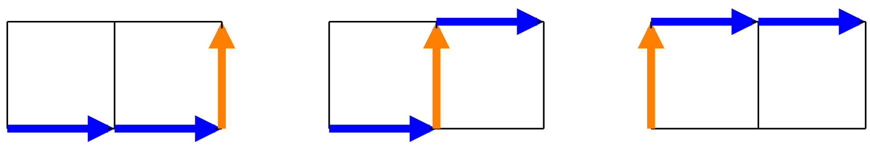


Solución 1

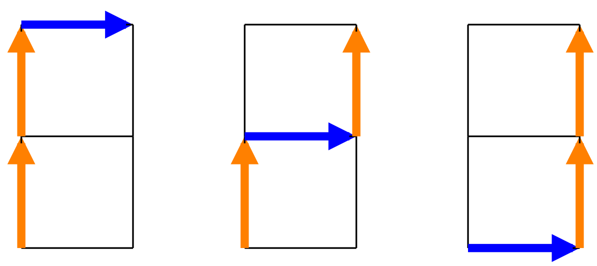
A fin de hallar una forma de contar todos los posibles caminos del punto A al B, buscaremos una forma de hacerlo para cualquier cuadrícula. Comencemos considerando sólo un cuadro. En este podemos hallar dos rutas posibles:



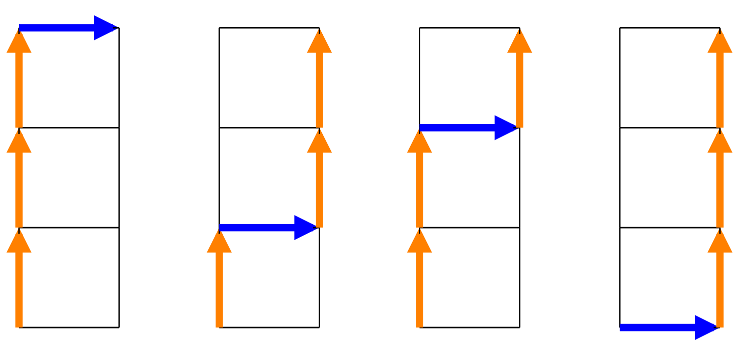
Ahora consideramos dos cuadros en configuración horizontal y podemos ver que hay tres rutas posibles:



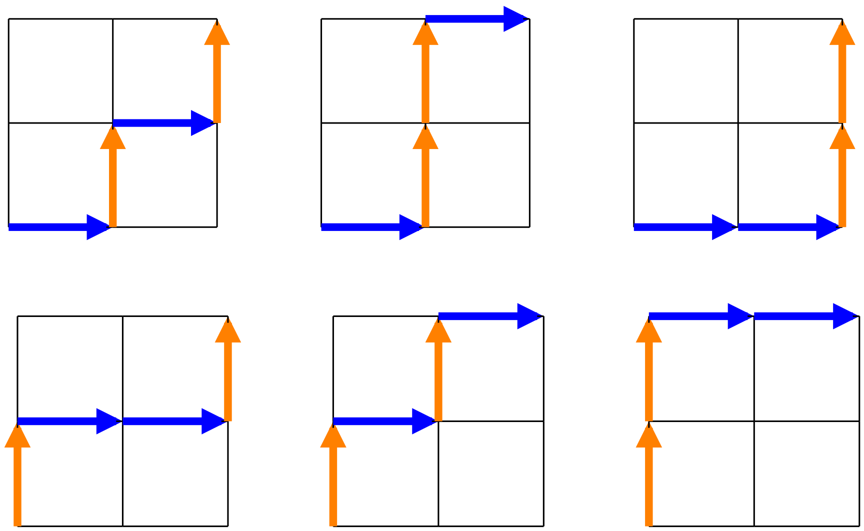
Si colocamos los cuadrados en configuración vertical, como esperábamos, también hay tres posibilidades:



Ahora consideramos tres cuadrados. En este caso, hay cuatro rutas posibles:

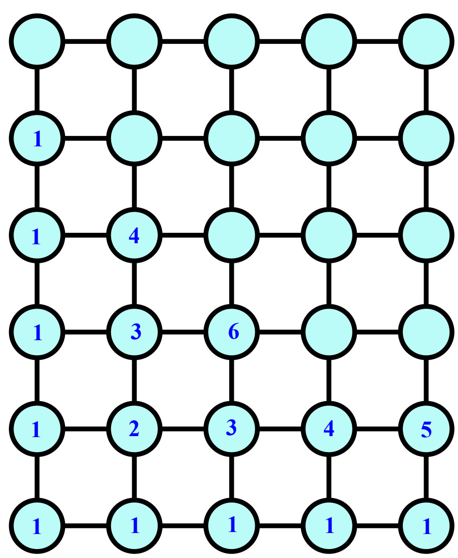


Si consideramos cuatro cuadrados, como podemos ver, hay seis rutas posibles:

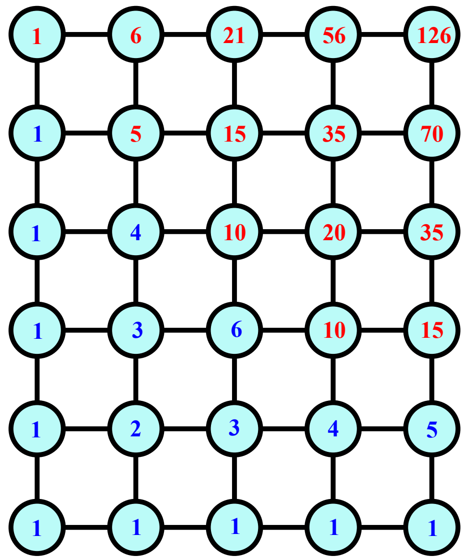


Partiendo de los esquemas presentados podemos deducir un patrón. Observemos, en el siguiente esquema, los valores que hemos encontrado para el número de rutas hasta los diferentes vértices. En azul hemos colocado los valores que encontramos evaluando los casos anteriores.

Debido a que los movimientos están restringidos, movimientos verticales hacia arriba y horizontales hacia la derecha, a un vértice objetivo se puede llegar únicamente pasando por el que está inmediatamente abajo, o por el que está inmediatamente a la izquierda. Observemos que desde cada uno de los vértices anteriores hay sólo una forma de llegar hasta el vértice objetivo. El número de rutas para llegar a un vértice será entonces igual a la suma de la cantidad de rutas existentes para llegar hasta los vértices anteriores.

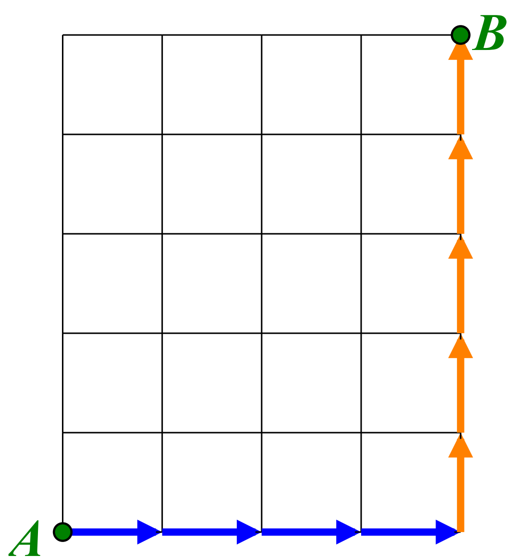


Siguiendo el patrón anteriormente descrito podemos completar el resto del esquema. Los números que así hemos deducido, los colocaremos en rojo:



De aquí, concluimos que hay 126 rutas para llegar del punto A al punto B.

Solución 2



Nótese que independientemente de la trayectoria haremos 4 movimientos hacia la derecha y 5 movimientos hacia arriba, en total 9 movimientos; por lo tanto, la solución utilizando combinatoria sería: $C_9^5 = 126$ (de nueve movimientos hacemos 5 hacia arriba); idénticamente se puede proponer $C_9^4 = 126$ (de los nueve movimientos hacemos 4 hacia la derecha).

Problema 22

El profesor Ulises preguntó a cuatro de sus estudiantes: ¿cómo se ordenarían ustedes respecto a sus edades de mayor a menor? A lo que cada una de las niñas contestó:

- Adela: "Mi amiga Maritza es mayor que yo".
- Maritza: "Silvia es mayor que yo".
- Silvia: "Yo nací antes que Rocío".
- Rocío: "Yo soy mayor que Maritza y menor que Silvia".

Analice sus respuestas e indique el orden pedido por el profesor.

Solución

Analicemos las relaciones de mayor o menor según las afirmaciones de cada estudiante.

Adela (A) sostiene que Maritza (M) es mayor: $A<M$

Maritza (M) sostiene que Silvia (S) es mayor que ella: $M<S$

Silvia (S) dice que nació antes que Rocío (R), lo que significa que es mayor: $S>R$

Rocío (R) afirma que es mayor que Maritza (M) y menor que Silvia (S): $M< R <S$

Analizando las relaciones, encontramos:

$A<M$; $M<S$; $S>R$; $M< R<S$

Podemos ubicar entonces en una tabla la siguiente relación, considerando la lectura de izquierda a derecha, la condición menor que:

$A<M<R<S$

Se deduce que por orden de edad Silvia es mayor que Rocío, Rocío mayor que Maritza y Maritza mayor que Adela.

Problema 23

Félix vive en la casa número 36 de la calle principal de Aguas Calientes, Chalatenango. Un día se presenta un empleado de la Alcaldía que prepara el censo municipal. A la pregunta sobre el número de hijos y su edad, Félix responde en tono bromista: "Tengo tres hijos, dos son gemelos, y el producto de sus edades coincide con el número de mi casa y la suma de sus edades con mi edad".El empleado de la Alcaldía, prestándose al juego, hace algunas cuentas y pide nueva información, ya que la que posee no es suficiente para complementarla. Entonces, Félix añade que la suma de las tres edades es impar y que su hijo mayor tiene ojos azules.

Solución

El empleado de la alcaldía descompone 36 en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{36} & \mathbf{2} \\ \mathbf{18} & \mathbf{2} \\ \mathbf{9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

Se deduce que hay tres posibilidades que a continuación se argumentan:

a. Los gemelos tienen 2 años y el otro hijo 9.

b. Los gemelos tienen 6 años y el otro hijo 1.

c. Los gemelos tienen 3 años y el otro hijo 4.

Por los requerimientos del problema, sólo la información del literal a satisface las tres condiciones; por lo tanto, los gemelos tienen 2 años, el mayor 9, la suma de sus edades es 13 años, y la edad del padre es 26.

Problema 24

Las páginas de un libro de resolución de problemas matemáticos escrito en la GECTI deben ser numeradas. Para ello uno de los autores ha empleado 2989 dígitos. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Solución

Las páginas se numeran según los números naturales 1, 2, 3...etc. Como lo que se nos pide es el total de páginas tomando en cuenta los dígitos que posee, haremos el siguiente análisis por rangos de los números naturales.

Números naturales	Dígitos	Resultado
1, 2, 3,…..,9	9 números de un dígito	$9\times1 = 9$
10, 11, 12,…..99	90 números de dos dígitos	$90\times2 = 180$
100, 101, 102,…..,999	900 números de 3 dígitos	$900\times3 = 700$
	TOTAL	2889

Si sumamos los resultados obtenidos, tendremos el número 2889. Para alcanzar la cantidad de dígitos que el autor ha empleado (2989) nos hacen falta 100. Cada una de las restantes páginas necesita 4 dígitos. Es decir, que todavía falta numerar 100/ 4 = 25 páginas, desde la 1000 hasta la 1024. En conclusión, el libro de resolución de problemas de la GECTI está compuesto por mil veinticuatro páginas.

Problema 25

La semana pasada he leído $\frac{1}{7}$ de un libro de resolución de problemas. A lo largo de esta semana he podido leer $\frac{4}{5}$ del resto. En total, he leído 87 páginas. ¿Cuál es el número total de páginas del libro?

Solución

Debemos conocer a cuánto equivale la fracción no leída, que se encuentra restándole a la unidad lo leído: $1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. La segunda semana se leyó $\frac{4}{5}$ de lo que faltaba por leer. Es decir: $\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{24}{35}$. Entonces, la cantidad total leida al final de la segunda semana es: $\frac{1}{7}+\frac{24}{35}=\frac{5}{35}+\frac{24}{35}=\frac{29}{35}$. Finalmente, establecemos una proporción tomando en cuenta que la fracción de páginas leídas hasta el momento, es a 1 como 87 páginas es al total: $\frac{29}{35}:1::87:\text{Total de páginas}$. Por lo tanto, el total de paginas es: $\frac{87\times1}{\frac{29}{35}}=\frac{87}{\frac{29}{35}}=\frac{\frac{87}{1}}{\frac{29}{35}}=\frac{3045}{29}=105$

Problema 26

Hemos vaciado agua contenida en un barril, en 41 recipientes de $\frac{3}{4}$ litros cada uno. Estos han quedado llenos, salvo uno de los recipientes que ha quedado hasta la mitad. En el barril sobran 14 litros. ¿Cuántos litros de agua contenía el barril?

Solución

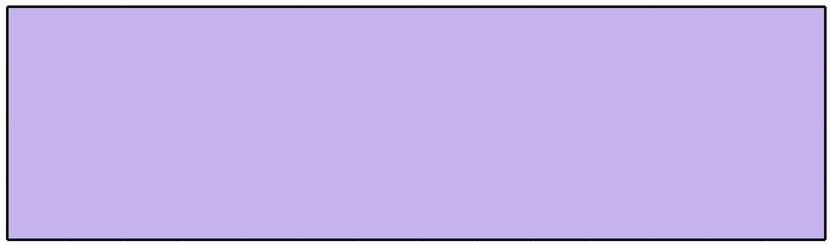
Los recipientes tienen capacidad de $\frac{3}{4}$ cada uno y hay 40 llenos por completo, el número 41 está a la mitad. $40\times\frac{3}{4}=\frac{120}{4}=30$ litros. $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$ litros. Ahora, sumamos los llenos y el lleno a la mitad $\frac{120}{4}+\frac{3}{8}=\frac{243}{8}$ litros. Con los 14 litros sobrantes tendríamos: $\frac{243}{8}+14=\frac{243+112}{8}=\frac{355}{8}=44\frac{3}{8}$ litros

Problema 27

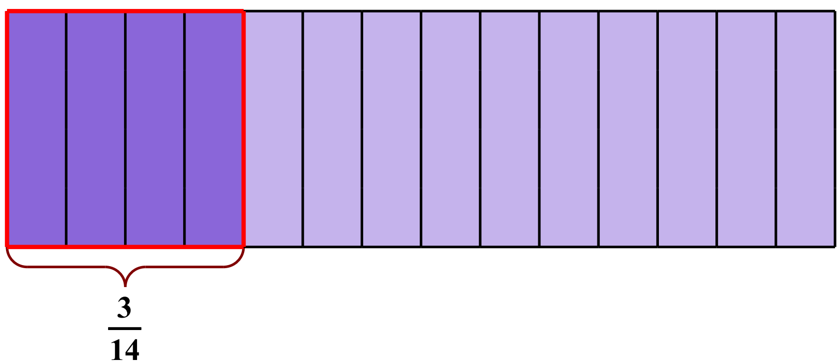
En una alcaldía de un municipio de Usulután se tiene previsto destinar $\frac{3}{14}$ de una finca para un museo de ciencias y matemática y un área ecológica. Se destinarán $\frac{3}{4}$ de lo previsto al área ecológica. ¿Qué fracción de la finca se ha destinado a la zona del museo?

Solución

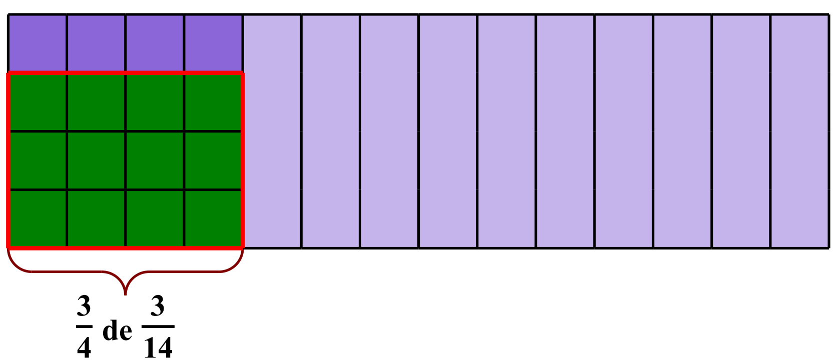
Supongamos que la finca tiene forma de rectángulo:



Está previsto destinar $\frac{3}{14}$ de la finca al museo de ciencias y matemática y jardines:



Procedemos a graficar sobre el rectángulo los $\frac{3}{4}$ destinados al área ecológica. Este lo marcamos en verde.



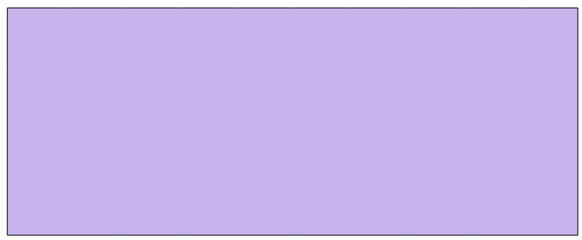
Así, deducimos que la fracción $\frac{3}{14}$ es equivalente a $\frac{12}{56}$, ya que $\frac{3}{14}\times\frac{4}{4}=\frac{12}{56}$. Finalmente, la fracción de la finca destinada al museo es: $\frac{12}{56}-\frac{9}{56}=\frac{3}{56}$

Problema 28

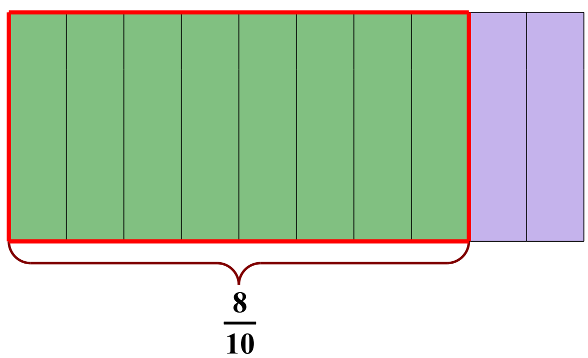
De un depósito de cereales se han extraído $\frac{8}{10}$ y al día siguiente se extrae $\frac{3}{4}$ del resto que quedó. ¿Cuánto se extrajo en total del depósito? Resolver este problema gráficamente.

Solución 1

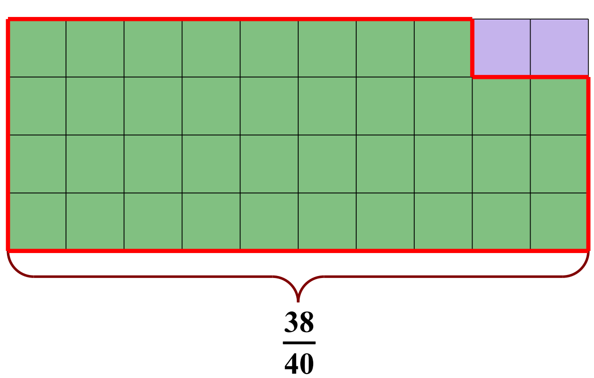
Consideremos el depósito de cerales como un rectángulo y en color verde las partes extraídas:



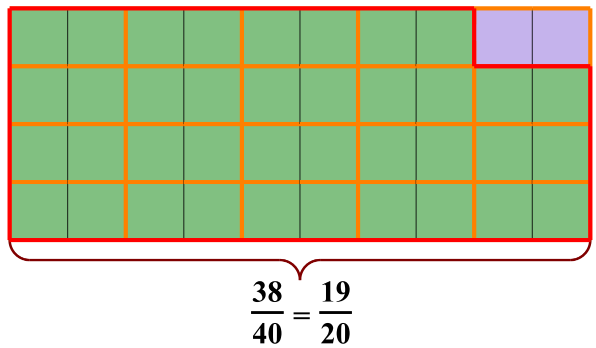
Dividamos en diez partes iguales el rectángulo. Colorearemos en verde la cantidad de cereales extraída del depósito, esto es $\frac{8}{10}$ y el sobrante es $\frac{2}{10}$



Ahora, dividiremos el depósito también en cuartos. Estas son las divisiones horizontales que hemos trazado en la siguiente figura. Observemos que, de lo que nos quedaba en el depósito, la parte coloreada en rosado, hemos quitado los tres cuartos que se extrajeron el segundo día. Estos están ahora marcados en verde.



Al contar las partes verdes se extrajo $\frac{38}{40} = \frac{19}{20}$ del total.



Por lo tanto, del depósito se extrajo $\frac{19}{20}$ del contenido inicial.

Problema 29

Si en un banco tengo un capital de \$100, ¿cuánto dinero tendré al final de tres años con un interés de 5% anual? ¿Cuánto habré ganado? ¿Cuál es mi porcentaje de ganancia al final de los tres años? Considere que el interés ganado se agrega al principal de la cuenta al final del año.

Solución

Consideremos que al final del primer año la cantidad que se tendrá en el banco sea:

$\$100 + \$100(0.05) = \$100(1 + 0.05) = \$100(1.05) = \$105$

Seguidamente, al final del segundo año será:

$\$105 + \$105(0.05) = \$105(1 + 0.05) = \$105(1.05) = \$110.25$

Esto también lo podemos calcular con base al monto inicial, de la siguiente manera:

$\$105(1.05) = \$100(1.05)(1.05) = \$110.25$

En el tercer año el resultado será:

$\$110.25 + \$110.25(0.05) = \$110.25(1 + 0.05) = \$110.25(1.05)$=\$115.7625

Al igual que el resultado anterior, esto lo podemos expresar con base al monto inicial al primer año: $\$110.25(1.05) = \$100(1.05)(1.05)(1.05) = \$115.7625$, que es la cantidad de dinero al final del tercer año.

Lo ganado al final del tercer año es \$115.7625-\$100=\$15.7625

El porcentaje de ganancia de los tres años es: $\frac{15.7625}{100} = 15.7\%$

Nota: se puede deducir un modelo general que habrá que probar por inducción, ya que, como se puede ver, hay un patrón. Notemos que este resultado nos permite hacer cálculos para determinar para más años, pues se observa el siguiente patron:

Año 1: $100(1.05)

Año 2: $100(1.05)(1.05)

Año 3: $100(1.05)(1.05)(1.05)

Nuestra conjetura es que para n años la cantidad será: $\$100\,\underbrace{(1.05)(1.05)(1.05)\ldots(1.05)}_{n\text{ años}}$

Problema 30

Si tengo que pagar $ 80 del sobrante del 12% de $120, ¿cuánto dinero me sobra?

Solución

El 12% se puede representar en forma de fracción como $\frac{12}{100}$. Si multiplicamos la cantidad de dinero inicial por esta fracción, obtendremos el 12% de esta: $\$120 \times \frac{12}{100} = \frac{\$1{,}440}{100} = \$14.40$

El 12% de $120 es $14.40. El sobrante es $\$120 - \$14.40 = \$105.60$. De este monto se deben pagar $80. Entonces al final sobran $\$105.60 - \$80 = \$25.60$.

Problema 31

Un DVD cuesta $56. ¿Cuánto deberá cancelar, si además de los $56, debe pagar 13% de impuestos?

Solución

El precio representa la unidad y el 13% el agregado. Este se puede representar en forma decimal como 0.13. Al sumar $1 + 0.13 = 1.13$, se tiene la constante por la que hay que multiplicar el precio del DVD sin impuestos. Entonces, el precio que se pagará por el DVD será $\$56 \times 1.13 = \$63.28$

Problema 32

¿Qué porcentaje representa de aumento en el precio de un producto que cuesta 120 y hace un mes costaba 60?

Solucion

Establezcamos una proporción entre las razones de "Precios" y "% de Precios": $\frac{\$60}{\$120} = \frac{100\%}{x}$.
Resolviendo para $x = \frac{\$120(100\%)}{\$60} = \frac{12000\%}{60} = 200\%$

El incremento se obtiene restando del precio actual el precio anterior. Lo mismo sucede con los porcentajes. El porcentaje de incremento se obtiene restando al porcentaje del precio actual el porcentaje del precio anterior: $200\% - 100\% = 100\%$

Problema 33

¿Qué número es mayor, el 40% de 50 o el 50% de 40?

Solución

El 40% se puede representar en forma decimal como 0.4. El 40% de 50 será entonces: $50 \times 0.4 = 20$. De similar manera, 50% se puede representar en forma decimal como 0.5. Entonces el 50% de 40 es: $40 \times 0.5 = 20$. Por lo tanto, son iguales.

Problema 34

Suponga que ahorra dos cantidades iguales en dos bancos diferentes. Ambas cantidades son de $1000. En el banco A, con tasa de interés de 3% mensual; y en el banco B, es 9% trimestralmente. ¿En cuál de los bancos se obtiene mayor ganancia por intereses al final de un año?

Solución

Este problema se puede resolver utilizando la siguiente expresión general:

$\boldsymbol{S = C(1 + I)^P}$ Donde, **C** = Capital inicial; **I** = Tasa de interés; **P** = Número de períodos.

Observemos que el patrón de la **Solución 1** nos permite aproximarnos a esta expresión general. Aplicando esta forma general a los dos casos presentados en estudio, tenemos los resultados siguientes:

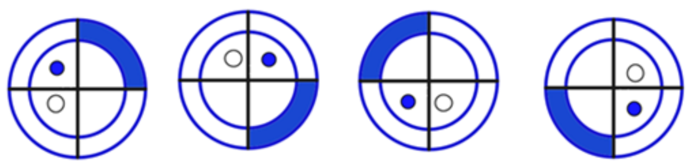
Banco A	Banco B
C = $1,000 I = 3% P = 12 (meses tiene el año) Sustituyendo datos	C = $1,000 I = 9% P = 4 (trimestres tiene el año) Sustituyendo datos

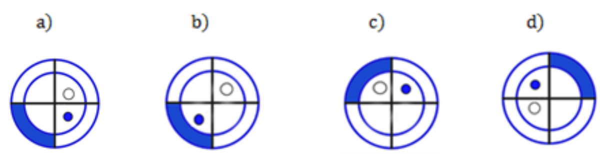
Banco A	Banco B
$\mathbf{S} = \$\mathbf{1,000(1+0.03)^{12}}$ $= \$\mathbf{1,000(1.03)^{12}}$ $= \$\mathbf{1,000(1.4257601)}$ $= \$\mathbf{1,425.760}$	S=$1,000(1 + 0.09)^4 $= \$1{,}000(1.09)^4$ $= \$1{,}000(1.4115816)$ $= \$1{,}411.58161$

De lo que concluímos que el banco A genera más ganancia.

Problema 35

Determine la figura que continúa de la secuencia:





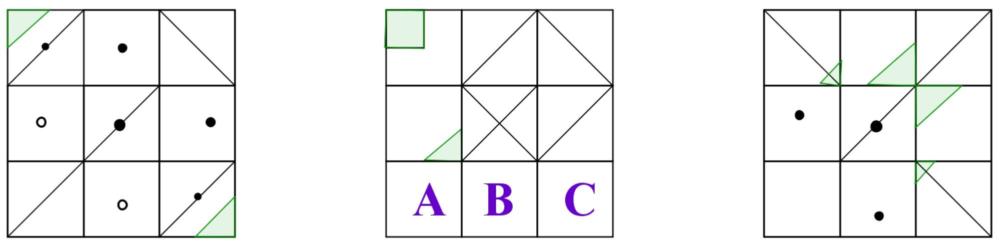
Solución

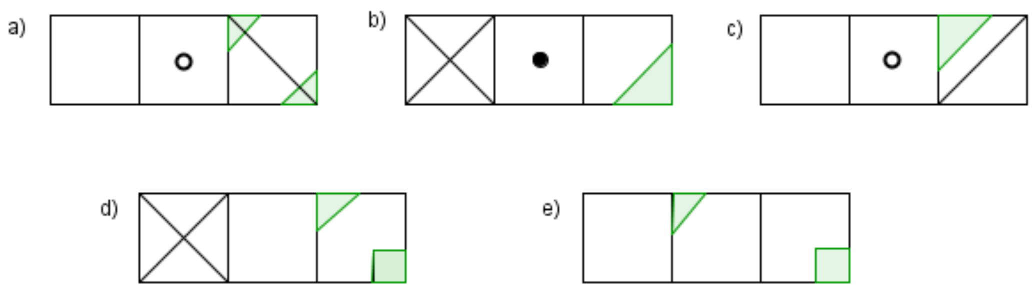
La respuesta del literal a es la correcta. Observemos el segmento del círculo exterior, en el primer movimiento éste se moverá un cuarto de círculo en sentido horario. En el siguiente movimiento, se mueve dos cuartos de círculo. En el tercer movimiento, se mueve tres cuartos de círculo. Los dos círculos pequeños en el interior se mueven de igual forma en cada movimiento. En el primer movimiento, se moverá un cuarto de círculo, en el segundo dos cuartos y, en el tercer movimiento, tres cuartos.

Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción a debido a que en el siguiente movimiento ambos elementos deberán moverse cuatro cuartos de círculo, quedando exactamente en la misma posición en la que estaban antes.

Problema 36

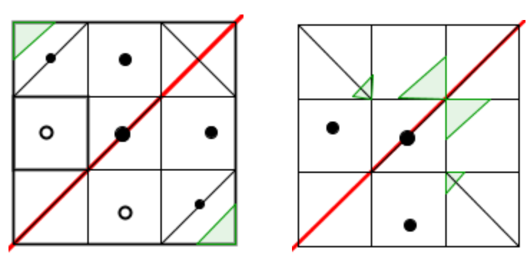
Argumente el proceso con el cual se obtiene la alternativa que debe ir en la posición de la palabra ABC.



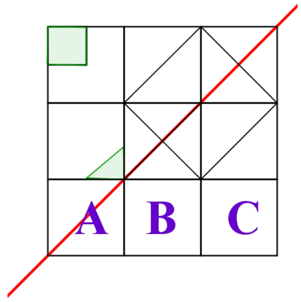


Solución

Observemos que en las figuras presentadas como ejemplo, ambas poseen ejes de simetría diagonales, como se muestra en las figuras que vienen a continuación.



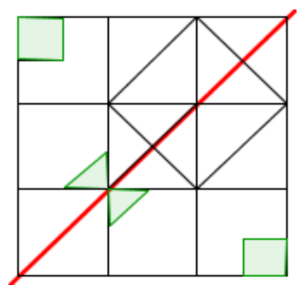
Tomaremos como estrategia, entonces, buscar un eje de simetría similar en la figura que buscamos completar. Al igual que en las dos imágenes anteriores, estableceremos el eje de simetría en una de las diagonales principales, como se muestra en la siguiente figura:



Al analizar el cuadro que ocupará la posición de la “A” en las 5 alternativas, vemos que todas son factibles, ya que por ser parte del eje de simetría solamente necesita ser simétrica ella misma. Esta propiedad se encuentra en todas las opciones.

Al analizar el cuadro que ocupará la posición de la “B” en las 5 alternativas, deducimos que debe tener un triángulo en la esquina superior izquierda en simetría con el cuadro que está sobre la “U” que es su opuesto, y solamente la alternativa “E” cumple la condición.

La alternativa “E” cumple también que la posición de la “C” es simétrica con el de la primera fila y primera columna. Por lo tanto, La alternativa que debe ocupar el espacio es la “E”.



Problema 37

Observe las siguientes figuras y determine qué tipo de isometría o movimiento que preserva todas las distancias, y por ello preserva el tamaño y la forma. Argumente su respuesta.

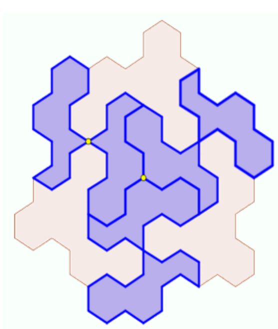


Figura 1

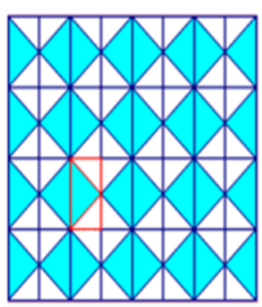


Figura 2


Figura 3

Solución

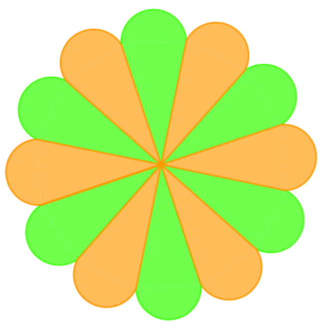
En la **Figura 1**, se observa una **rotación y traslación**. En cada caso, se puede conseguir el teselado haciendo rotaciones y traslaciones.

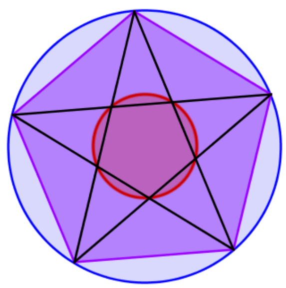
En la **Figura 2**, se ha utilizado una **simetría** utilizando como punto de partida:  Esta figura además, tiene varios ejes de simetría. Se pueden apreciar, además, traslaciones.

En la **Figura 3**, se destaca una **traslación,** ya que los puntos de cada una de las partes que la conforman se han trasladado en forma vertical, diagonal u horizontal.

Problema 38

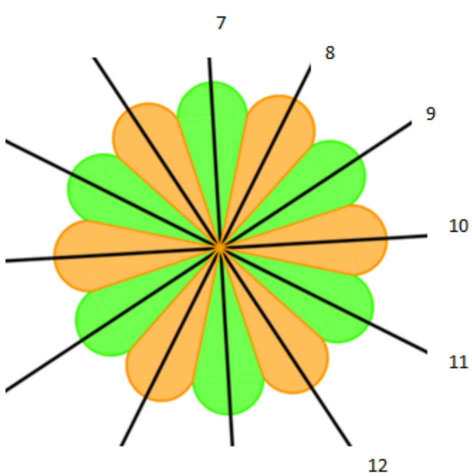
¿Cuántos ejes de simetría tienen las siguientes figuras?

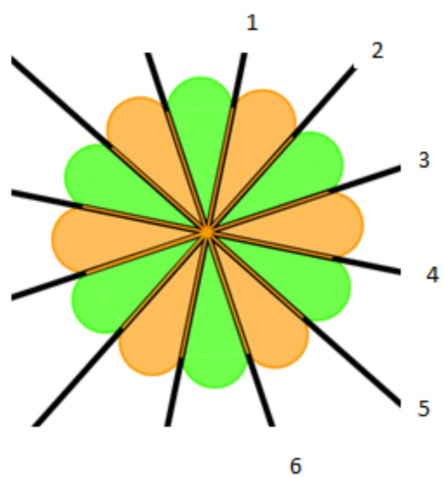




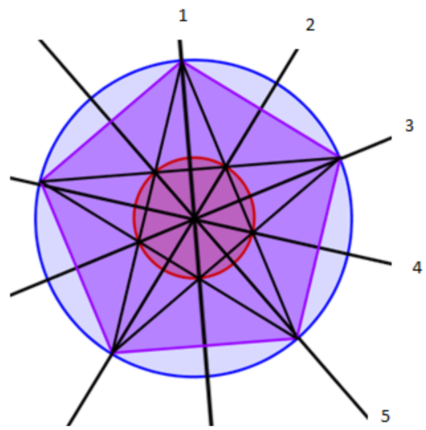
Solución

La figura de la izquierda tiene 12 ejes de simetría, como se muestra a continuación:



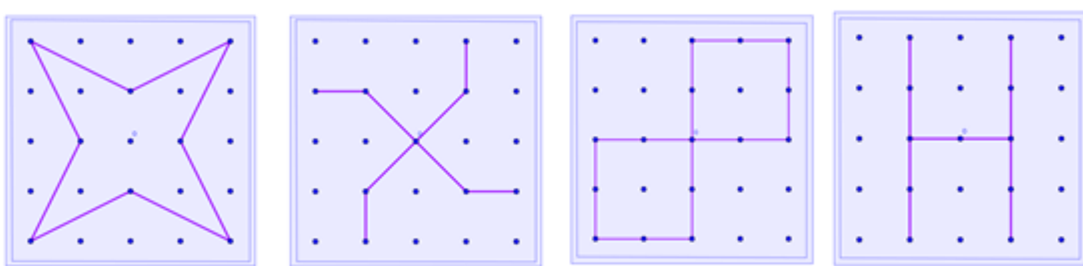


La siguiente figura tiene 5 ejes de simetría, los cuales se muestran a continuación:



Problema 39

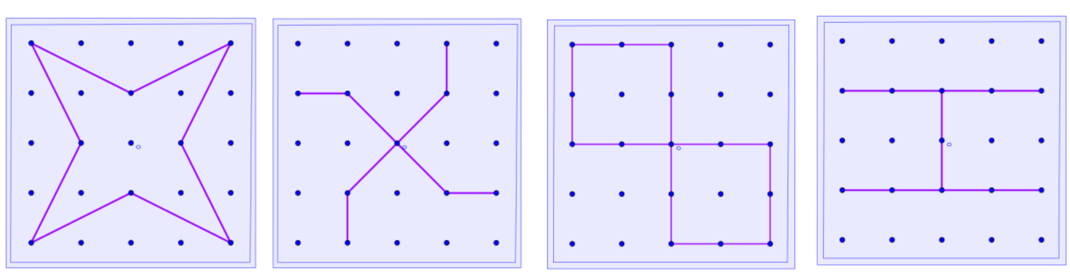
¿Cuál de estas figuras será la misma después de $\frac{1}{4}$ de giro? ¿Y de $\frac{1}{2}$ de giro? ¿Cuál es su argumento?



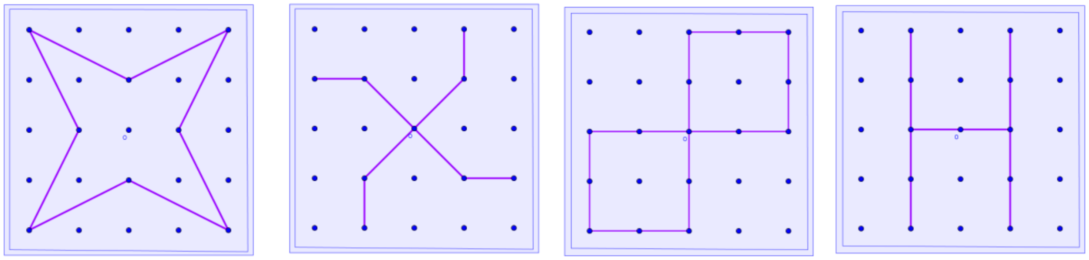
A B C D

Solución

Después de un cuarto de giro las figuras lucirán así:



Solamente las figuras A y B son las mismas. Después de medio giro las figuras quedan así:



En este caso, todas las figuras vuelven a ser las mismas.

Problema 40

En un negocio de venta de sorbetes se ofrecen 20 sabores. Un cliente puede pedir un sorbete con una o con dos bolas; si pide dos bolas pueden ser del mismo sabor o diferentes. ¿Cuántos sorbetes de diferentes sabores ofrece el negocio?

Solución 1

Si son 20 sabores diferentes, y el sorbete es de una bola, se pueden ofrecer 20 sorbetes.

Para sorbetes de dos bolas, con el mismo sabor, tendríamos nuevamente 20 sorbetes.

Si coloco un sabor de los 20 como base, puedo combinar 19 diferentes sabores. Descartando el sabor anterior como base, pues ya lo hemos contado, si coloco otro sabor como base tengo 18 sabores diferentes. Descartando el sabor de base anterior y colocando otro como base, obtengo 17 sabores. Coloco otro como base, y obtengo 16. Así, tengo una recurrencia:

$20 - n$, donde n es el sabor de base.

20 – 1 = 19	**20 – 6 = 14**	**20 – 11 = 9**	**20 – 16 = 4**
20 – 2 = 18	20 – 7 = 13	20 – 12 = 8	20 – 17 = 3
20 – 3 = 17	20 – 8 = 12	20 – 13 = 7	20 – 18 = 2
20 – 4 = 16	20 – 9 = 11	20 – 14 = 6	20 – 19 = 1
20 – 5 = 15	20 – 10 = 10	20 – 15 = 5	

Al sumar estos resultados obtenemos:

$20 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 230$ sorbetes en diferentes combinaciones.

Problema 41

Félix acude a un restaurante con sus dos gemelos y una hija, que es dos años mayor. La porción de pollo cuesta $ 4.6 para personas adultas, las niñas y niños pagan $ 0.45 por cada año de su edad. Después de comer, Félix paga $16.30. ¿Cuáles son las edades de sus dos hijos y de su hija?

Solución

Inicialmente restaremos de los $16.30, los $4.60 correspondientes a la ración de pollo de Félix, quedando $11.70. Seguidamente a $11.70 le restamos dos veces $0.45, que corresponden a los dos años mayor que tiene la hija respecto a la edad de los gemelos.

Se tiene entonces la siguiente operación: $11.70 – (2× 0.45) = $10.80. No olvidar que cada año corresponde a $0.45.

Quedan aún $10.80, cantidad que puedo dividir entre $0.45 para saber a cuántos años corresponden los $10.80.

Su resultado es: $10.80 ÷ $0.45 = 24 años (24 veces cabe $0.45 en $10.80)

Así, se deduce que 24 años suman los tres hijos por igual, ya que descontamos los dos años más que tiene la hija. Entonces, 24 años ÷ 3 = 8 años.

Comprobemos los resultados anteriores:

8 años × $0.45 = $3.60 cada gemelo, por los dos seria $7.20.
10 años × $0.45 = $4.50 por la hija, dos años mayor que los gemelos.

Sumamos: $7.20 + $4.50 + $4.60 = $16.30

Entonces, los gemelos tienen 8 años cada uno y la hija tiene 10 años.

Problema 42

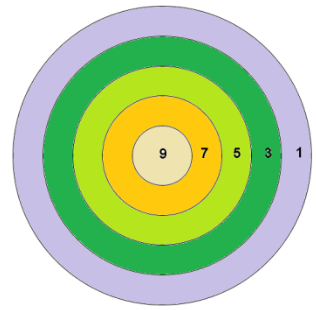
El Centro Escolar República de El Salvador está preparando una excursión a la Costa del Sol. En cada autobús que alquilan para dicho evento deben ir 40 estudiantes y sólo se permite un autobús que lleve menos de 40. ¿Cuántos autobuses se necesitan para transportar simultáneamente a 736 estudiantes del Centro Escolar? Además, el estudiantado está feliz, porque no irán docentes. Pero a última hora, la Dirección decide completar con docentes el bus que lleva menos de 40 estudiantes. ¿Qué cantidad de docentes irá a la excursión?

Solución

Si en cada autobús caben 40 estudiantes y se transportaran 736, dividimos los 736 entre 40 y obtenemos como cociente 18 y residuo 16, que no caben en los 18 autobuses que transportarán exactamente 40. Por lo tanto es necesario un autobús más para transportar a esos 16 estudiantes restantes. Se necesitarían 19 autobuses para transportar a los 736 y el número de docentes que irá es 24.

Problema 43

Ulises está lanzando dardos sobre una diana que presenta 5 anillos circulares con sus respectivas puntuaciones: 1, 3, 5, 7, y 9. Ulises lanza 3 dardos que se clavan todos sobre distintos anillos de la diana. ¿Cuáles son todas las posibilidades de puntaje que pudo haber obtenido Ulises? ¿Es posible obtener puntaje 16?



Solución

Utilizando combinatoria de los cinco anillos escogemos tres, esto es: C_5^3=10. Nótese que podemos escoger los anillos donde no da el dardo, y éstos son: C_5^2=10 posibilidades. La tabla siguiente ilustra todas la posibilidades:

					TOTAL
			3	1	4
		5		1	6
		5	3		8
	7			1	8
	7		3		10
	7	5			12
9				1	10
9			3		12
9		5			14
9	7				16

El total de puntos que se puede hacer, como máximo con todos los anillos, es 25. Notemos que restando a 25 los puntos obtenemos los resultados dados en la **Solución 1**, y que no hay forma de obtener el puntaje16.

Problema 44

En la suma:

$$\begin{array}{r} A\ A\ A \\ B\ B\ B\ + \\ \hline A\ A\ A\ C \end{array}$$

Si A, B y C representan dígitos diferentes, ¿cuáles son estos dígitos?

Solución 1

Observemos que si $A = 0$, entonces $B = C$; pero eso no es posible por la condición de que los dígitos deben ser diferentes. Lo mismo ocurre si $B = 0$. En este caso, $A = C$.

Observemos que el resultado tiene cuatro dígitos, a diferencia de los sumandos que sólo tienen tres. Esto implica que en la suma hay "llevadas", es decir, que la suma de algunos de los dígitos de los sumandos resultan en números mayores que 9. La mayor cantidad que se puede llevar es 1, como lo mostraremos a continuación.

La máxima suma que se puede obtener en las unidades para $A + B$ es $9 + 8 = 17$. Por lo tanto, lo máximo que podemos "llevar" es 1. Esto se verificará para todas las demás posiciones (decenas, centenas, etc.). Observemos primero lo que ocurre en las decenas. A+B +1(que es la "llevada"), da como resultado más de 9 y tiene un valor máximo de 18.

Seguidamente por el mismo argumento en las centenas $A + B + 1$ (la "llevada"), da como resultado más de 9 pero como máximo 18. Así, finalmente para las unidades de millar, la "llevada" a lo sumo es 1. En esta columna, la "llevada" tiene el mismo valor que A. Como ya vimos, A no puede ser 0; por lo tanto, A =1.

Entonces, sustituyendo este valor en la operación inicial tenemos:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1 \\ B\ B\ B\ + \\ \hline 1\ 1\ 1\ C \end{array}$$

Observemos que la suma de las unidades $B + 1$ debe dar como resultado más que 9 para lograr que se "lleve" 1 a las decenas. Esto, sólo será posible si $B = 9$. Entonces, la suma de las unidades será: $9 + 1 = 10$, de donde deducimos que $c = 0$.

Así los números son:

$$\begin{array}{r l} 1\;1\;1 & \\ 9\;9\;9 & + \\ \hline 1\;1\;1\;0 & \end{array}$$

Observemos que en las unidades era necesario que se "llevara" 1. Si no se "llevara" 1, por ejemplo si B fuese 8, la operación hubiese resultado en un total de tres dígitos. Dejamos a la lectora o lector realizar esta verificación.

Solución 2

De la operación propuesta sabemos que $\mathrm{aaac} = \mathrm{aaa} + \mathrm{bbb}$. Pero también podemos escribir: $\mathrm{aaac} = \mathrm{aaa}(10) + \mathrm{c}$

Igualando estas dos expresiones observamos que $\mathrm{aaa} + \mathrm{bbb} = \mathrm{aaa}(10) + \mathrm{c}$, que se puede expresar como: $\mathrm{aaa} + \mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c}$. De aquí se deduce que $\mathrm{bbb} = \mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c}$. Esto implica que $\mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c}$, es un número de tres dígitos.

La expresión $\mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c}$ será un número de tres dígitos únicamente cuando a sea 1. Si es mayor que 1, el producto de $\mathrm{aaa}(9)$ tendrá cuatro dígitos; y si a es 0, la expresión $\mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c}$, tendrá el valor de c, que es un sólo dígito. Por lo tanto, concluímos con certeza que $\mathrm{a} = 1$.

Si a=1, tendremos que $111(9) + \mathrm{c} = 999 + \mathrm{c}$, es un número de tres dígitos. Pero esto sólo será cierto si $\mathrm{c} = 0$. Para cualquier otro valor, el resultado tendrá cuatro dígitos. Por lo tanto, $\mathrm{c} = 0$. De aquí deducimos que $\mathrm{bbb} = \mathrm{aaa}(9) + \mathrm{c} = 999 + 0 = 999$. Esto implica que $\mathrm{b} = 9$.

Problema 45

Carlos es nuestro vendedor de sorbetes de carretón. Él vende sorbetes de fresa (F), de chocolate (C), de vainilla (V). Recientemente hizo un sondeo entre sus últimos 121 clientes y descubró que 42 prefieren primero la fresa, luego los de vainilla, y finalmente los de chocolate. Representamos esta información así: 42: $F > V > C$

Pero también descubrió que 40 prefieren primero chocolate, luego los de vainilla y finalmente los de fresa. Representamos esta información así: 40: C > V > F

Finalmente, 39 prefieren primero vainilla, luego los de chocolate y finalmente los de fresa. Representamos esta información así: 39: V> C > F

Si se toma toda esta información en conjunto, ¿cuál es el verdadero orden de preferencia que la clientela manifiesta acerca de los tres sabores de sorbetes?

Solución 1

Asignemos valores a las preferencias. Al primer sabor le asignamos 3, al segundo 2 y al tercero 1. Multiplique los valores por la frecuencia. Según la preferencia de datos, tenemos:

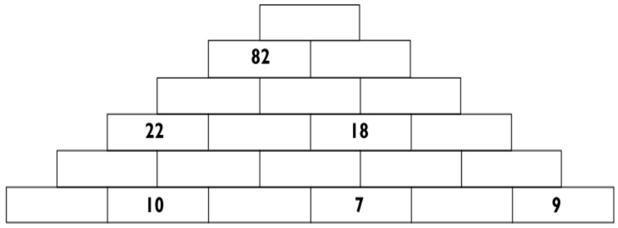
	Fresa	Vainilla	Chocolate
42	126	84	24
40	40	80	120
39	39	117	78
	205	281	240

El verdadero orden de preferencia es vainilla, chocolate y fresa.

Notemos que en este caso, utilizamos las ponderaciones de 3, 2 y 1 para las preferencias. Si se usan diferentes ponderaciones podríamos obtener órdenes diferentes.

Problema 46

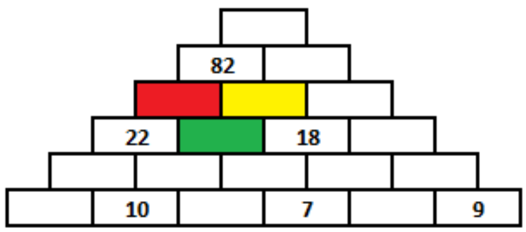
En este problema se representa una "pirámide numérica", en cada cuadro se tiene asignado un número natural. Este número se obtiene sumando los números que están en los cuadros del piso inferior que sirven de base. ¿Qué número se encuentra en la cúspide de la pirámide?



Solución

Notemos que 82 es la suma de las cantidades que están en los cuadros rojo y amarillo; además, que 22 más el valor que está en el cuadro verde, da como resultado el valor del cuadro rojo.

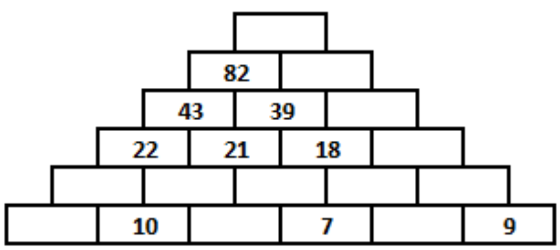
Igualmente 18 más el valor que está en el cuadro verde dará como resultado el valor que está en el cuadro amarillo.



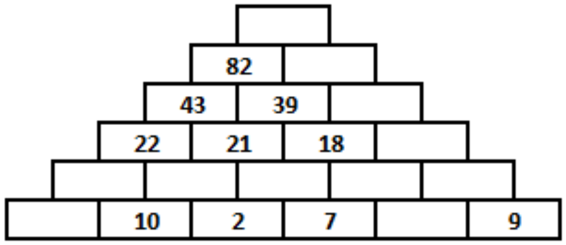
Es decir, que 82 es 22 + 18, más dos veces el valor que está en el cuadro verde.

Esto es, 82 es 40 más dos veces el valor que va en el cuadro verde. Así, necesariamente, el cuadro verde aloja el número 21.

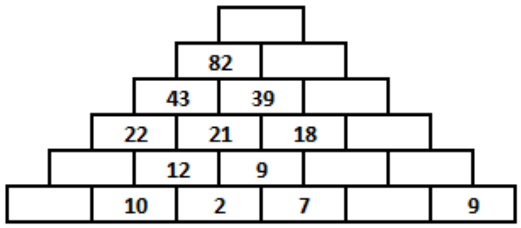
Ahora sumemos estos valores para encontrar los dos sumandos que dan como total 82: $22 + 21 = 43$, $21 + 18 = 39$ y $43 + 39 = 82$, así:



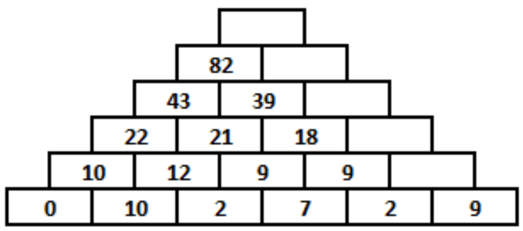
Utilizando la misma técnica encontremos el número 10 y 7. Partimos de que 21 es igual a 10 + 7, más dos veces el número que está entre ambos. Para encontrar ese número resto $21 - 10 - 7 = 4$; luego, divido este resultado entre dos y obtengo: $4/2 = 2$, que es el número entre 10 y 7.



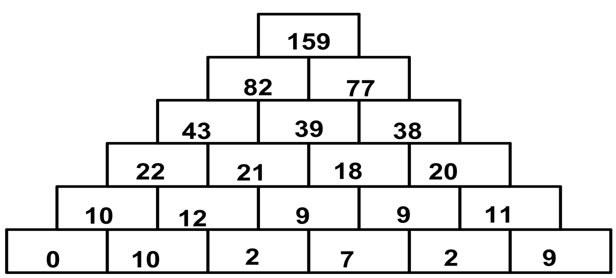
Sumando encontramos los dos sumandos que dan como total 21: $10 + 2 = 12\,, 2 + 7 = 9$ y $12 + 9 = 21$, así:



Efectuando restas completo esa pirámide parcial: $22 - 12 = 10,\ 10 - 10 = 0,\ \ 18 - 9 = 9, 9 - 7 = 2$. Al final, obtenemos:



Efectuando las sumas completo la pirámide: $2 + 9 = 11, 11 + 9 = 20, 20 + 18 = 38, 38 + 39 = 77, 77 + 82 = 159$



Por lo tanto, el número que está en la cúspide es 159.

Problema 47

El año pasado, Maritza, Melissa, Yolibeth y Rocío siguieron un curso de tenis, pero dadas sus distintas obligaciones de estudio y trabajo, no pudieron asistir al mismo número de lecciones. Melissa asistió al doble de lecciones que Rocío, Yolibeth a cuatro veces más clases que Maritza, pero tres menos que Melissa. Maritza en total asistió a 15 clases. ¿A cuántas clases fue Rocío?

Solución

Sea X la cantidad de Melissa, entonces X/2 la cantidad de Rocío, Yolibeth X - 3, además Yolibeth tiene $15 \times 4 = 60$; luego, sumando las clases de Maritza, se tiene 60+ 15 = 75 clases.
Sustituyendo tenemos: X - 3 = 75, de donde X = 78. Sustituyendo en todas las expresiones tenemos qué Melissa asistió a 78 clases, Yolibeth a 75, Maritza a 15 y Rocío asistió a 39.

Problema 48

En cada uno de los casilleros se han cambiado de lugar cuatro números (uno por cada línea). Reubíquelos en su casilla, de manera que la suma de los números de cada fila arroje el mismo resultado.

6	5	8	6
3	7	9	4
7	5	8	3
6	9	4	6

2	6	4	3
1	3	3	2
9	3	1	3
5	1	1	1

Solución

Primero calculemos cuánto debe sumar cada una de las filas. Sabemos que todas tienen la misma suma y que todos los números están en una de ellas. Por tanto, si sumamos todos los números del tablero y lo dividimos por las 4 filas, obtendremos la suma de cada una de ellas en el tablero final.

El resultado de sumar los valores de la primera fila es 96. Al dividir este valor entre 4 resulta 24. Este valor es el que debe sumar cada una de las filas.

Las siguientes, son las sumas actuales en el primer tablero:

6	5	8	6	= 25
3	7	9	4	= 23
7	5	8	3	= 23
6	9	4	6	= 25

Para hacer que todas sumen 24 podemos mover algunos valores, de modo que el valor de una fila, que suma 23, sea intercambiado por un valor de una de las filas que suman 25. Éstos deben ser tales que el valor, que originalmente estaba en la fila 25, sea 1 más que el valor de la fila que suma 23 por el que será intercambiado. Procediendo de esta forma, podemos reordenar los valores como se muestra en la siguiente figura, donde están marcados en amarillo los valores que han sido cambiados de posición.

6	5	7	6	= 24
3	8	9	4	= 24
7	5	9	3	= 24
6	8	4	6	= 24

Con el siguiente tablero procederemos de similar manera. Al sumar todos los valores en el tablero obtenemos 48, que al dividir por las cuatro filas da como resultado 12.

Los valores que resultan de sumar los números en cada fila antes de hacer cambios, son los que se muestran a continuación:

2	6	4	3	= 15
1	3	3	2	= 9
9	3	1	3	= 16
5	1	1	1	= 8

Procedemos ahora de forma análoga a la solución del primer tablero. Debemos, por ejemplo, mover un número entre las filas que suman 9 y 15, de tal forma que su diferencia sea 3 y que el mayor esté en la fila que suma 15. De forma similar procedemos con las otras dos filas. Así, logramos que las sumas sean 12, como se muestra a continuación. Los números que hemos cambiado de posición aparecen marcados en amarillo.

2	6	1	3	= 12
4	3	3	2	= 12
5	3	1	3	= 12
9	1	1	1	= 12

Problema 49

Las tres hijas de un ganadero de Chalatenango heredan del padre 51 vacas, que se deberán repartir entre ellas del siguiente modo: la mitad para la primera hija, un tercio para la segunda y una novena parte para la tercera. La partición parece imposible de realizar sin sacrificar una vaca. Así pues, deciden acudir a una jueza que por cierto también es experta en Matemática. ¿Cuántas vacas debe la jueza agregar como mínimo a la herencia, para que todas se vayan felices con la repartición y no se sacrifique ningún animal?

Solución

La jueza dice: "Añadiré tres vacas a las de ustedes". De este modo, dispondremos de 54. Según la voluntad de su padre, tú que eres la mayor deberías recibir la mitad de 51 vacas, es decir, 25 y medio. En cambio te daré la mitad de 54, es decir, 27. A la segunda hija le corresponde un tercio de la herencia, que equivale a 17 vacas, pero yo le asignaré un tercio de 54, es decir, 18 vacas. A la más joven, le corresponde una novena parte de la herencia, es decir, 5 vacas y un poco más. En cambio, le daré 6 vacas enteras. Ahora, al hacer la suma, tenemos: 27+18+6=51

La jueza debe agregar como mínimo 3 vacas y, al final, no sacrifica ninguna.

Problema 50

Un señor entra en una tienda para comprar 4 litros de aceite. El vendedor, a quien se le han roto todos los recipientes de un litro que suele emplear como unidad de

medida, se ve obligado a calcular de otra forma. Tiene a su disposición los siguientes recipientes:

- Un recipiente A lleno de aceite, con 8 litros de capacidad.
- Un recipiente B vacío, de 5 litros de capacidad.
- Un recipiente C vacío, de 3 litros de capacidad.

¿Cómo se las arreglará el vendedor para dar al cliente 4 litros de aceite contenidos en el recipiente más grande(A), usando como medida sólo los tres recipientes A, B y C descritos arriba?

Solución

Veamos gráficamente los recipientes. Lo que hará el vendedor es trasladar el aceite a todos los recipientes, de tal manera que encuentre la medida exacta de 4 litros.

Puede proceder así:

A=8 (lleno de aceite)

B= 0 (vacío de aceite)

C= 0 (vacío de aceite)

Se mostrará a través de una secuencia de pasos el proceso.

Inicialmente tenemos la siguiente distribución de aceite:

A	B	C
8	0	0

Pasaremos 3 litros de aceite del recipiente **A** al recipiente **C**.

A	B	C
5	0	3

Pasaremos 3 litros de aceite del recipiente **C** al recipiente **B**.

A	B	C
5	3	0

Pasaremos 3 litros de aceite del recipiente **A** al recipiente **C**.

A	B	C
2	3	3

Pasaremos 2 litros de aceite del recipiente **C** al recipiente **B**.

A	B	C
2	5	1

Pasaremos 5 litros de aceite del recipiente **B** al recipiente **A**.

A	B	C
7	0	1

Pasaremos 1 litro de aceite del recipiente **C** al recipiente **B**.

A	B	C
7	1	0

Finalmente, pasaremos 3 litros de aceite del recipiente **A** al recipiente **C**.

A	B	C
4	1	3

Así, tenemos el recipiente A con 4 litros de aceite.

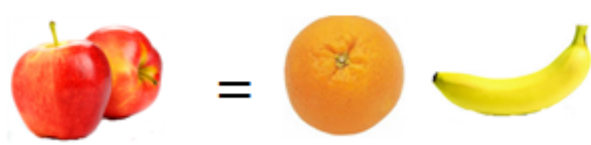
Problema 51

Un vendedor de frutas me ha planteado el siguiente problema: tres guineos que individualmente tienen igual peso, en conjunto pesan igual que dos manzanas que a su vez individualmente tiene el mismo peso. Dos manzanas pesan igual que una naranja acompañada de un guineo. Si se sabe que un guineo y una manzana pesan 300 gramos, ¿cuánto pesa el guineo, la manzana y la naranja?

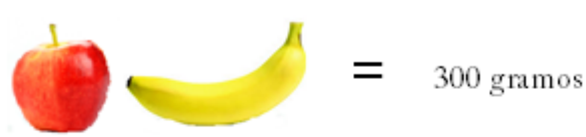
Solución

Condición 1

Condición 2



Notemos que un guineo y una manzana pesan 300 gramos,



Es decir, que un guineo pesa 300 gramos menos el peso de la manzana y la manzana pesa 300 gramos menos el peso del guineo. Si sustituimos el peso de la manzana en la **Condición 1**, tendremos que tres guineos equivalen a 600 gramos, menos el peso de dos guineos. Osea, 5 guineos pesan 600 gramos. Si todos los guineos pesan lo mismo, un guineo tendrá un peso de 120 gramos, y por lo tanto, la manzana tendrá un peso de 180 gramos.

Es fácil deducir de la **Condición 2** que dos manzanas pesan 360 gramos. Esto equivale a decir que un guineo pesa 120 gramos, más el peso de la naranja, por lo que esta última debe tener un peso de 240 gramos para equilibrar la balanza.

Por lo tanto, el guineo, la manzana y la naranja, pesan 120, 180 y 240 gramos respectivamente.

Problema 52

A un pueblo del municipio de Usulután, conocido como el pueblo misterioso, llega una turista. En ese pueblo sus habitantes dicen la verdad lunes, miércoles, viernes y domingo, mientras que martes, jueves y sábados, mienten. La turista, que es despistada, no sabe exactamente en qué día ha llegado y se propone investigarlo sosteniendo un dialogo con una habitante:

Turista: "¿Qué día es hoy?"
Habitante: "Sábado".
Turista: "¿Qué día será mañana?"
Habitante: "Miércoles".
¿Qué día deduce la turista?

Solución1

La primera respuesta que da la habitante es falsa, porque, de ser cierta, sería sábado y los sábados mienten. Es decir, debe ser martes o jueves. Asimismo, la segunda respuesta nos dice que mañana no es miércoles, porque sabemos que la habitante miente. Por lo tanto, el día actual es jueves.

Solución 2

Consideremos los días de la semana.

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Vienes**	**Sábado**	**Domingo**

Ahora bien, con la primera parte del dialogo:

Turista: "¿Qué día es hoy?"
Habitante: "Sábado".
Descartemos definitivamente el sábado, pues si en verdad fuese sábado, la habitante no puede decir la verdad, porque sabemos que el día sábado se miente.

Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Vienes**	~~**Sábado**~~	**Domingo**

De igual manera, sabiendo que la habitante ha mentido, descartemos los días en los cuales la gente dice la verdad. Por tanto, podemos descartar que el día actual sea lunes, miércoles, viernes o domingo.

~~Lunes~~ Martes ~~Miércoles~~ Jueves ~~Viernes~~ ~~Sábado~~ ~~Domingo~~

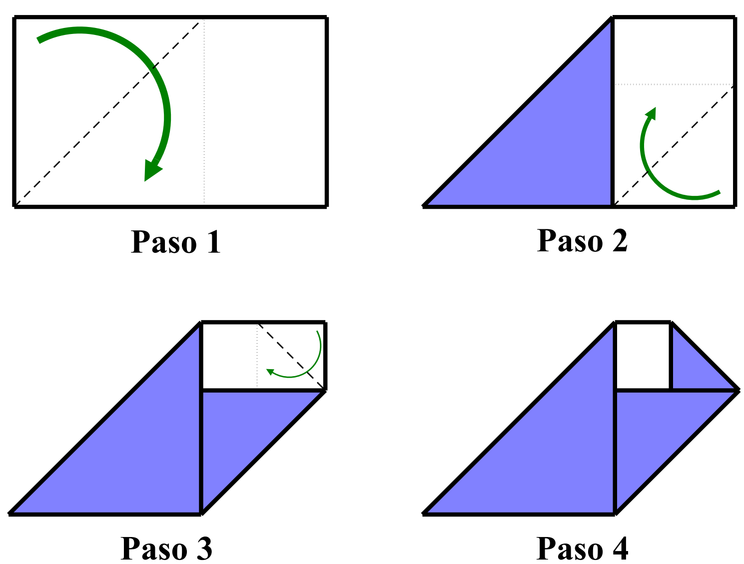
Ahora, prestemos atención a la segunda parte del dialogo:
Turista: "¿Qué día será mañana?"
Habitante: "Miércoles".
Como sólo tenemos dos opciones, martes o jueves, descartamos el día martes, pues si en verdad mañana fuese miércoles, la habitante estaría diciendo la verdad, pero sabemos que está mintiendo.

~~Lunes~~ ~~Martes~~ ~~Miércoles~~ Jueves ~~Viernes~~ ~~Sábado~~ ~~Domingo~~

Por lo tanto, el día siguiente tiene que ser jueves.

Problema 53

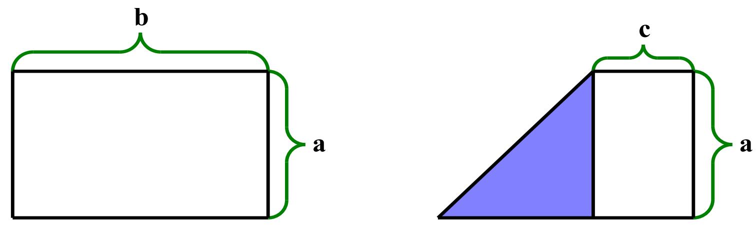
Una hoja rectangular de papel, blanca de un lado y azul del otro, fue doblada tres veces, como lo muestra la figura:



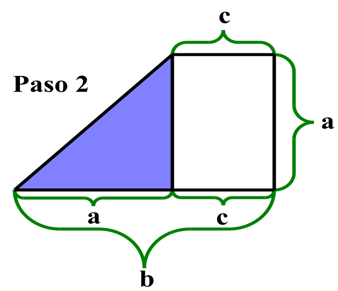
El rectángulo blanco en el **Paso 2**, tiene $20cm$ más de perímetro que el rectángulo blanco del **Paso 3**. Este a su vez tiene $16cm$ más de perímetro que el rectángulo blanco del **Paso 4**. Determine el área de la hoja de papel completa, es decir, la hoja sin dobleces.

Solución

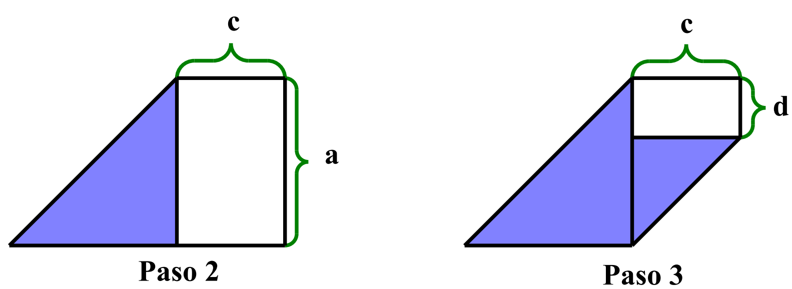
Observemos que los rectángulos blancos en los diferentes pasos tienen lados en común. Les daremos a cada uno de estos lados nombres, como se muestra en las siguientes figuras:



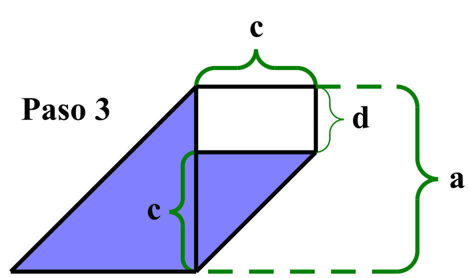
Al doblar la página el lado a del **Paso 1**, que es un borde de la hoja de papel, también es uno de los lados del rectángulo blanco del **Paso 2**. Observemos que al doblar la hoja por primera vez, el borde que se dobla también es del tamaño a, por ser anteriormente opuesto al lado a en un rectángulo. Por lo tanto, el lado b es igual a la distancia c más una distancia a, que podemos escribir como: $b = c + a$, como se muestra en la figura siguiente:



Ahora, observemos los **pasos 2 y 3**. Ambos rectángulos blancos comparten el lado c. Al doblar la esquina de la página, el lado opuesto a este lado común c (que también tiene una longitud c) queda sobre uno de los lados de longitud a del rectángulo del **Paso 2**.

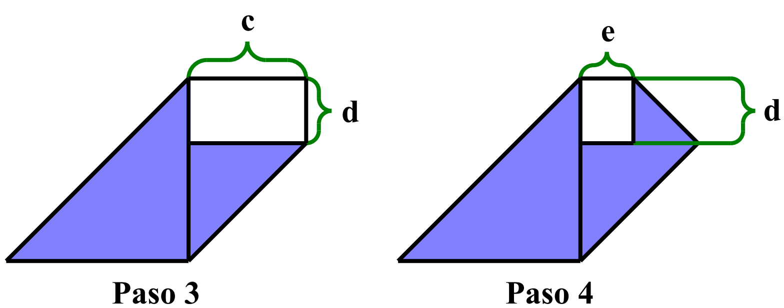


Por lo tanto, $a = d + c$.

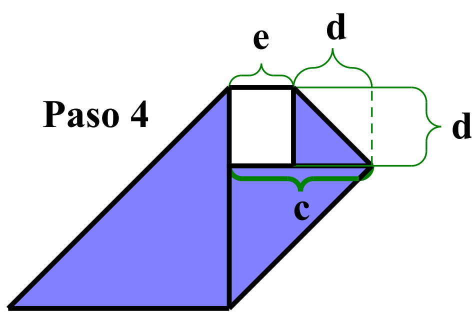


Sabemos que el perímetro del rectángulo blanco del **Paso 2** es $20cm$ más que el perímetro del rectángulo blanco del **Paso 3**. Pero, sabiendo que estos dos rectángulos comparten un lado igual, la diferencia de perímetros reside completamente en los lados que son diferentes. Es decir, que un lado a debe ser $10cm$ más que un lado d. Por lo tanto, $a = d + 10cm$. Pero también, como se observa en la figura anterior, sabemos que $a = d + c$. Por lo tanto, $c = 10cm$.

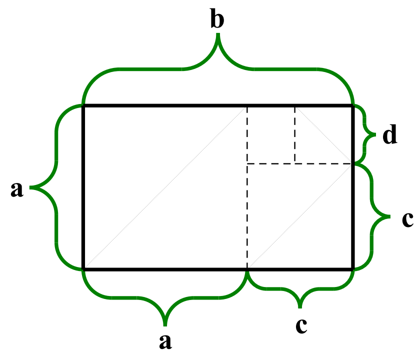
Ahora observemos los siguientes dos rectángulos, y procedamos de forma análoga. Los rectángulos tienen un lado en común. En este caso es d. Sabemos, por las condiciones del problema, que el perímetro del rectángulo blanco del **Paso 3** es $16cm$ más que el perímetro del rectángulo blanco del **Paso 4**.



Esta diferencia debe residir completamente en los dos lados que no son comunes a los rectángulos. Por lo tanto, de esto inferimos que $c = e + 8cm$. Pero sabemos que $c = e + d$, como se muestra en la siguiente figura:



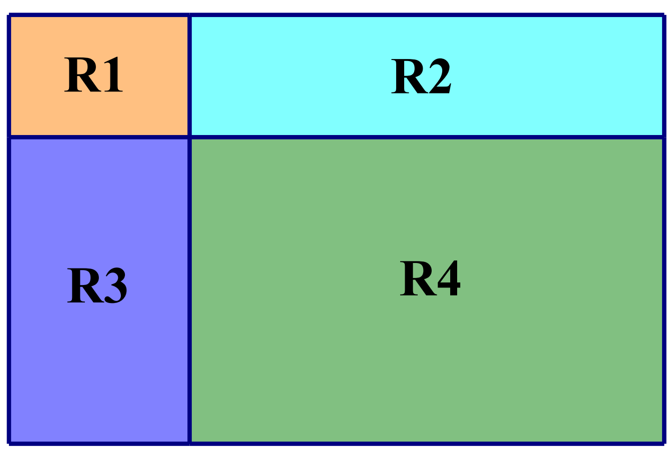
Por lo tanto, $d = 8cm$. Además, anteriormente habíamos ya concluido que $a = d + c$. Así, $a = 8cm + 10cm = 18cm$. Además, $b = a + c = 18cm + 10cm = 28cm$. Esto se puede observar con más claridad en la siguiente figura, donde se muestra la hoja de papel desdoblada y la ubicación de cada rectángulo y doblez.



El área de la página de papel debe ser entonces $base \times altura = b \times a = 28cm \times 18cm =$ 504cm^2

Problema 54

El rectángulo de la figura está dividido en cuatro rectángulos más pequeños mediante dos líneas paralelas en sus lados. En tres de ellos se ha escrito el perímetro correspondiente. ¿Cuál es el perímetro del cuarto rectángulo?



Solución 1

Notemos que en el rectángulo **R1,** cuyo perímetro mide 1 cm, la longitud de la base y la altura suman 0.5 cm. De igual forma la longitud de la base y altura de los rectángulos **R2** y **R3,** cuyos perímetros miden 2 cm, deben sumar 1 cm.

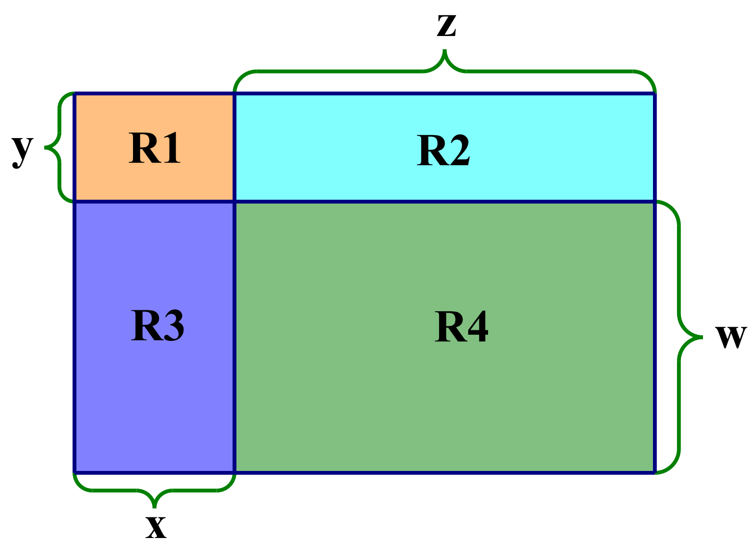
Vemos que el rectángulo **R1** de perímetro 1cm comparte altura y base, respectivamente, con los rectángulos **R2** y **R3**.

Observemos que los rectángulos **R2** y **R3** comparten también la base y altura, respectivamente, del rectángulo **R4**. Si le restamos 0.5, la suma de la base y la altura de R1, a la suma de la base y la altura de los rectángulos **R1** y **R2,** que suman 2, obtenemos que la base y la altura del rectángulo **R4** es de 1.5 cm.

Finalmente, el perímetro de **R4** será: 2(1.5cm)= 3cm.

Solución 2

Llamemos a la base y altura de **R1** x y y, respectivamente. Como el perímetro es 1cm, la suma $x + y = 0.5cm$. Similarmente, para R2 y R3, tenemos que la suma de sus base y altura será de 1cm. Así, si la base y altura de R2 son z e y, respectivamente, y+z=1c. Si la base y altura de R3son x y w, entonces x+w = 1cm.



Entonces

$z + y + x + w = 2cm \Rightarrow z + w = 2cm - (y + z) = 2cm - 0.5cm$

$\Rightarrow z + w = 1.5cm$. De esto deducimos que el perímetro de **R4** es 3cm.

Problema 55

Se eligen dos números enteros entre 1 y 100, inclusive tales que su diferencia es 7 y su producto es múltiplo de 5. ¿De cuántas maneras se puede hacer esta elección?

Solución

Para que un número sea múltiplo de 5 uno de sus factores deberá ser múltiplo de 5.

En total, hay 20 múltiplos de 5 entre 1 y 100, los cuales son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 y 100.

Para 17 de ellos (10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 y 90) hay dos formas de hallar un número que satisfaga que la diferencia entre ellos sea 7. Esto lo logramos sumándole o restándole 7. Así, obtenemos 34 maneras de generar números con los que se cumplan estas dos condiciones. Por ejemplo, tomemos el número 25 que está en la lista: 25+7=32 y 25 -7=18, de donde 32 -25 =7 y $32\times25 = 800$, 25 - 18= 7 y $25\times18 =$ 450.

Respecto a los números 5, 95 y 100, que no hemos considerado en la lista anterior, hay sólo una forma de hallar otro número con el cual cumplan la segunda condición. A 5 sólo le podemos sumar 7, pero no restar porque el resultado sería negativo. A 95 y 100 les podemos restar 7, pero no sumar porque los resultados serían mayores que 100.

Por lo tanto, el número de formas de hacer esta selección es: $17(2) + 3 = 37.$

Referencias Bibliográficas

Colvin, G. (2008) Talent is Overrated: What really separates World-Class Performers from Everybody Else. London: Penguin Group.

Gardner, M. (1988) Matemática para Divertirse: Un Paseo por las Diversas Ramas de la Matemática a Través de más de 50 Problemas de Ingenio (M. Rosemberg). Buenos Aires: Ediciones Juan Granica S.A. (Trabajo original publicado en 1986)

Gispert, C. (1993) Sabelotodo 1000 desafíos para tu inteligencia, Edición de la lengua española. (Trabajo original enigmística 1000 problemi per 365 giorni, Italia)

Miller, C. (2008) Estrategias de Razonamiento. México, Primera Edición por Pearson Educación de México, S.A, de C.V

Paenza, A. (2010) Matemática… ¿Estás Ahí?: La Vuelta al Mundo en 34 Problemas y 8 Historias. Disponible en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza. Buenos Aires: Siglo Veintiuno editores.

Posamentier, A. S. (2003) Math Wonders: to Inspire Teachers and Students. Virginia, Alexandria: ASCD Publictions.

Sloane, P. (1994) Great Lateral Thinking Puzzles. Nueva York: Sterling Publishing Company, Inc.

Tahan, M. (1991) Matemática Divertida E Curiosa. Rio de Janeiro: Distribuidora Record De Serviços De Impremsa S.A.

Zabala, M. (2004) Desarrollo del pensamiento matemático. La adición, Edición n° 3, Federación Internacional Fe y Alegría. Caracas Venezuela.

Zabala, M. (2005) Desarrollo del pensamiento matemático. La sustracción, Edición n°4, Federación Internacional Fe y Alegría. Caracas Venezuela.

Zabala, M. (2005) Desarrollo del pensamiento matemático. La Multiplicación, Edición n° 5, Federación Internacional Fe y Alegría. Caracas Venezuela.

Referencias Web

http://luisamariaarias.wordpress.com

http://juegos-de-mates-manuel.blogspot.com/2009/10/57bis-tangram-chino-y-poligonos.html

http://mimosa.pntic.mec.es/jcolon/pjanteriores2.html#2pdoce14

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena2/2esoquincena2.pdf

http://centromatematico.uregina.ca

http://people.okanagan.bc.ca/clee/bcssmc/

http://projecteuler.net/

http://math.columbusstate.edu/tournament/

http://mathcontest.olemiss.edu

http://www.artofproblemsolving.com/Wiki/index.php/AMC_Problems_and_Solutions

http://www.furthermaths.org.uk/stmchallengepast.php

http://www.math.sc.edu/contest/problems.html

http://www.mathcomp.leeds.ac.uk/

Artículos sobre la Resolución de Problemas Matemáticos

Cruz, M. (2006): La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. Tomo 1 La Habana: Educación Cubana.
http://www.matematicaparatodos.com/varios/resolucion_de_problemas.pdf

El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje
http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF

La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf

La resolución de problemas. Una revisión teórica http://revistasuma.es/IMG/pdf/21/011-020.pdf

Resolución de Problemas Matemáticos
http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

Resolución de problemas según Polya y Schoenfeld
http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/memorias/4toCIEMAC/Ponencias/Resoluciondeproblemas.pdf

Los materiales de autoformación e innovación docente, son un esfuerzo del Gobierno de El Salvador para desarrollar y potenciar la creatividad de todos los salvadoreños y salvadoreñas. Estos difunden una visión vívida y dinámica de la ciencia y la matemática, con un enfoque de ciencia, tecnología e innovación (Enfoque CTI).

Agradecemos a la Universidad Politécnica de El Salvador su apoyo a través del proyecto Desafió Politécnica, por su rol en la formación y desarrollo de RESPROMAT y a Fundación CIDECO de El Salvador por el trabajo desarrollado hombro con hombro con la Gerencia de Educación en Ciencia, Tecnología e Innovación, siendo uno los frutos de este trabajo conjunto el presente libro de resolución de problemas.